

Remark on the Sharp Cut-off Estimate and the Lions-Magenes-Strichartz Space

岸本展（京都大学数理解析研究所）

堤誉志雄*（京都大学理学研究科）

$f(0) = 0$ である関数 $f \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ に対し、不等式

$$\|\chi_{\mathbb{R}_+} f\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \quad (1)$$

が成立するかもしれないと予想するのは自然であろう（例えば, Molinet and Ribaud [MR] では不等式 (1) を使っているが, 論文 [MV1], [MV2] では時間負方向の方程式が正しく定式化され不等式 (1) は必要なくなっている）。正しそうな理由は, Sobolev 空間 $H^{1/2}(\mathbb{R})$ はぎりぎりトレースが存在しないので, $f(0) = 0$ を満たす連続関数 f を特性関数 $\chi_{\mathbb{R}_+}$ によってシャープに切断しても, 特異性は悪さをしないように見えるからである。さらに, 別の状況証拠もある。次の二つの不等式が成立することは容易に分かる。

$$\|\chi_{\mathbb{R}_+} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (2)$$

$$\|\chi_{\mathbb{R}_+} f\|_{H^1(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_0^1}, \quad f \in \mathcal{H}_0^1. \quad (3)$$

但し, $s \neq 1/2$ に対して $\mathcal{H}_0^s = H_0^s(\mathbb{R}_+) \oplus H_0^s(\mathbb{R}_-)$ とし, $s = 1/2$ のときは後で正確な定義を述べる。ここで, 「二つの不等式 (2) と (3) を補間すれば (1) が得られる」という主張は正しいように思える。しかし実は, この主張は正しくない。今回の講演では, 論文 [KT] の Lemma A.4 をもとに, 不等式 (1) のどこが誤りなのか説明するとともに, そのために必要な Lions-Magenes-Strichartz 空間にも触れたい。

不等式 (1) は, Fourier 制限法を用いる際に現れる Duhamel 積分評価式

$$\left\| \chi_{\mathbb{R}_+}(t) \psi(t) \int_0^t U(t-t') f(t') dt' \right\|_{X^{s,b}} \lesssim \|f\|_{X^{s,b-1}}, \quad b = 1/2$$

*第2著者が講演する。

が成立するかどうかに関わる。但し、 $U(t)$ は Schrödinger 方程式などの線形分散型方程式の発展作用素を表し、 $\psi(t)$ は $\psi(t) = 1$ ($|t| < 1$) かつ $\psi(t) = 0$ ($|t| > 2$) であるような C^∞ 級関数とする。空間 $X^{s,b}$ に対し、 $b = 1/2$ と取れるかどうかは、時間負方向では意味を持たなくなる確率項や散逸項が付加された問題において重要となる。

まず今回の講演で使う関数空間の定義を明確にしておく。 $s \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}_\pm) &= \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\pm) \mid \|f\|_{H^s(\mathbb{R}_\pm)} < \infty\} \quad (\text{複号同順}), \\ \|f\|_{H^s(\mathbb{R}_\pm)} &= \inf \{ \|g\|_{H^s(\mathbb{R})} \mid g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), g = f \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\pm) \} \quad (\text{複号同順}), \\ H_0^s(\mathbb{R}_\pm) &= \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_\pm)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}_\pm)}} \quad (\text{複号同順}) \\ \mathcal{H}_0^{1/2} &= H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+) \oplus H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_-), \\ H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_\pm) &= \{f \in H^{1/2}(\mathbb{R}_\pm) \mid \int_{\sim \pm 0} \frac{|f(t)|^2}{|t|} dt < \infty\}. \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

但し、記号 $\int_{\sim \pm 0}$ は、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して、それぞれ区間 $(0, +\varepsilon)$ と区間 $(-\varepsilon, 0)$ 上での積分を表す。最初の3つの定義は、 $\mathbb{R}_\pm$ を $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω にそのまま拡張できる。

注意 1 空間 $H^s(\mathbb{R})$, $H_0^s(\mathbb{R}_\pm)$ の定義については、Triebel [Tr] を参照。空間 $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_\pm)$ はしばしば *Lions-Magenes* 空間と呼ばれるが（例えば、Tartar [Ta, Lecture 33 on pages 159-161] 参照）、空間1次元のときは *Strichartz* の方が早く導入したので、*Lions-Magenes-Strichartz* 空間と呼ぶのが公平であろう（*Lions and Magenes* [LM1, Théorème 5.2 on page 322] では、 L^p 空間に対応した *Sobolev* 空間 $H^{s,p}$ に対し、複素補間空間 $[H_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)]_{1/p}$ は $H_0^{1/p,p}(\Omega)$ の真部分空間であることが指摘されているが、補間空間の特徴付けはなされていない）。空間1次元のとき *Strichartz* が定義しその性質を調べた (*Strichartz* [S, Theorem 3.1 on page 1054])。 *Lions and Magenes* はそれを空間2次元以上に拡張した (*Lions and Magenes* [LM2, Theorem 11.7 on page 66])。具体的には、 $\mathbb{R}^n$ の滑らかな有界領域 Ω に対し、関数 $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は Ω 上で正とし

$$\forall x_0 \in \partial\Omega, \exists d > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho(x)}{d(x, x_0)} = d$$

を満たすものとし、

$$H_{00}^{1/2}(\Omega) = \{f \in H^{1/2}(\Omega) \mid \int_\Omega \frac{|f(x)|^2}{\rho(x)} dx < \infty\}$$

と定める．実補間を考えると，

$$(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))_{1/2,2} = H_{00}^{1/2}(\Omega) \subsetneq H_0^{1/2}(\Omega)$$

となることが知られている ([LM2, Theorem 11.7 on page 66, Remark 11.4 on page 68] 参照)．しかし， $1 \geq s > 0$ かつ $s \neq 1/2$ に対して $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))_{s,2} = H_0^s(\Omega)$ ([LM2, Theorem 11.6 on page 64] 参照) であり，さらに $1/2 \geq s > 0$ に対して $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$ であることに注意 ([LM2, Theorem 11.1 on page 55] 参照)．従って， $0 < s < 1$ に対する $H^s(\mathbb{R}_+)$, $H_0^s(\mathbb{R}_+)$, $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+)$ の関係は次のように纏められる．

$$(H_0^1(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+))_{s,2} = \begin{cases} H_0^s(\mathbb{R}_+) \subsetneq H^s(\mathbb{R}_+) & (1/2 < s < 1), \\ H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+) \subsetneq H_0^{1/2}(\mathbb{R}_+) = H^{1/2}(\mathbb{R}_+) & (s = 1/2), \\ H_0^s(\mathbb{R}_+) = H^s(\mathbb{R}_+) & (0 < s < 1/2). \end{cases}$$

ここで， $1/2 < s < 1$ に対しては

$$f \in H_0^s(\mathbb{R}_+) \iff f \in H^s(\mathbb{R}_+) \text{ and } f(0) = 0$$

であることを思い出すと，その類推として

$$f \in H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+) \iff f \in H^{1/2}(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}) \text{ and } f(0) = 0$$

が成り立つと予想することは自然であろう．(逆に， $f \in H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$ なら $f(0) = 0$ であることは明らかである．) しかし，この主張が正しいかどうか明らかではないが正しいとしても，集合 $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$ は $H_0^{1/2}(\mathbb{R}_+)$ で稠密であるという事実が (1) の成立を妨げている．(稠密性は， $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \subset H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$ から従う．)

注意 2 $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+)$ に属する関数は，

$$\int_{\sim+0} \frac{|f(t)|^2}{t} dt < \infty$$

を満たす．これは，Laplace 方程式の解が連続となる時の外力の条件や Fourier 級数の各点収束で現れる Dini 条件

$$\int_{\sim+0} \frac{|f(t)|}{t} dt < \infty$$

を連想させる (f が有界であれば, *Dini* 条件の方が強いが, そうでない場合は強弱の関係はない). また, 一般化 *Hardy* 不等式との関係も興味深い. さらに, $1 < p < \infty$ のとき, L^p 空間に対応した *Sobolev* 空間 $H^{s,p}$ を考えると,

$$H_{00}^{1/p,p}(\mathbb{R}_+) = \left\{ f \in H^{1/p,p}(\mathbb{R}_+) \mid \int_{\sim+0} \frac{|f(t)|^p}{t} dt < \infty \right\}$$

と定義される (*Strichartz [S, Theorem 3.1 on page 1054]* 参照). *Lions and Magenes [LM2]* では, $H_{00}^{1/2}$ しか扱われておらず, 一般次元において $H_{00}^{1/p,p}$ がどの程度研究されているのか著者は知らない (少なくとも, 2007 年出版の *Tartar* の講義録 *[Ta]* では何も触れられていないようである). また *[LM2]* の除外ケースである, $s_j = k_j + 1/2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 > k_2$ であるとき, 補間空間 $(H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega))_{\theta,2}$ ($0 < \theta < 1$) がどうなるのか, *Lions and Magenes [LM2]* 以降の進展も著者は知らない (この問題は, *[LM2, Remark 11.6 on page 68]* において “somewhat teratological” であると書かれている). 後半で述べた事柄については, 著者が知らないだけで, いずれも解決されているであろう.

今回の講演では, 次の定理について解説する.

定理 1 (Kishimoto and Y.T [KT], 2021)

$$\begin{aligned} \exists \{f_n\} \subset H^{1/2}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}); f_n(0) = 0, \\ \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} < \infty, \quad \|\chi_{\mathbb{R}_+} f_n\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \longrightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

注意 3 定理 1 は不等式 (1) が成立しないことを示している. そのこと自体は, *Strichartz [S, Theorem 3.1 on page 1054]* から従うが, 定理 1 の証明では構成的に列 $\{f_n\}$ を与える.

最後に, 不等式 (2) と (3) を補間しても, なぜ (1) が出ないのか説明しよう. 不等式 (2) と (3) は, それぞれ次の不等式 (4), (5) と同値である.

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+) \oplus L^2(\mathbb{R}_-)}, \quad (4)$$

$$\|f\|_{H_0^1(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_0^1}. \quad (5)$$

実際, 不等式 (2) と (4) が同値であることは明らかである. また,

$$\begin{aligned} \langle (\chi_{\mathbb{R}_+} f)', \psi \rangle &= -\langle \chi_{\mathbb{R}_+} f, \psi' \rangle = -\langle \chi_{\mathbb{R}_+}, (f\psi)' - f'\psi \rangle \\ &= \langle \delta, f\psi \rangle + \langle \chi_{\mathbb{R}_+} f', \psi \rangle = \langle \chi_{\mathbb{R}_+} f', \psi \rangle, \\ f &\in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

であることから,

$$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \implies (\chi_{\mathbb{R}_+} f)' = \chi_{\mathbb{R}_+} f' \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

ゆえに, (3) の左辺は $\|f\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}$ と等しいため, (3) と (5) は同値である. そこで, 不等式 (4) と (5) を補完すると,

$$\|f\|_{H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_0^{1/2}} \quad (6)$$

を得る (Lions and Magenes [LM2, Theorem 11.7 on page 66] 参照). 従って, 不等式 (2) と (3) を補完しても, 自明な不等式 (6) を得るだけであり不等式 (1) は得られない. 特性関数 $\chi_{\mathbb{R}_+}$ を乗じる掛け算作用素は $\mathcal{H}_0^{1/2}$ から $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}_+)$ への連続作用素であることが知られている. 従って, 不等式 (1) の右辺で $H_0^{1/2}(\mathbb{R}_+) \oplus H_0^{1/2}(\mathbb{R}_-)$ のノルムを $\mathcal{H}_0^{1/2}$ のノルムで置き換えれば, 不等式 (1) が成立することが分かる. ([S, Theorem 3.1 on page 1054] 参照).

参考文献

- [KT] N. Kishimoto and Y. Tsutsumi, Well-posedness of the Cauchy problem for the kinetic DNLS on $\mathbf{T}$, preprint, 2021 (arXiv:2108.13001).
- [LM1] P. L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes (IV), *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **15** (1961), 311–326.
- [LM2] P. L. Lions and E. Magenes, “*Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*”, Vol. 1, Springer-Verlag, 1972.
- [MR] L. Molinet and F. Ribaud, On the low regularity of the Korteweg-de Vries-Burgers equation, *Int. Math. Res. Not.*, **2002**, no. 37, 1979–2005.
- [MV1] L. Molinet and S. Vento, Sharp ill-posedness and well-posedness results for the KdV-Burgers equation; the real line case, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **10** (2011), 531–560.
- [MV2] L. Molinet and S. Vento, Sharp ill-posedness and well-posedness results for the KdV-Burgers equation; the preiodic case, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365** (2013), 123–141.

- [S] R. S. Strichartz, Multipliers on fractional Sobolev spaces, *J. Math. Mech.*, **16** (1967), 1031–1060.
- [Ta] L. Tartar, “*An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*”, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer-Verlag, 2007.
- [Tr] H. Triebel, “*Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*”, North-Holland, 1978.