On the derivative Schrödinger equation with weakly dissipative structure

西井 良徳　(東京理科大学)*

本発表は李春花氏 (延辺大学), 佐川侑司氏 (千葉工業大学), 砂川秀明氏 (大阪公立大学) との共同研究に基づく.

次の微分型Schrödinger 方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = N(u, \partial_x u), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $i = \sqrt{-1}$, $u = u(t,x)$ は $\mathbb{C}$-値未知関数, φ は $H^3 \cap H^{2,1}$ に属する小さな初期値とする. ただし, H^k は k 階の Sobolev 空間, $H^{k,m}$ は重み付き Sobolev 空間で $\|\phi\|_{H^{k,m}} = \|\langle\cdot\rangle^m \phi\|_{H^k}$, $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$ である. 非線形項 $N(u, \partial_x u)$ は $(u, \overline{u}, \partial_x u, \overline{\partial_x u})$ に関する3次斉次多項式と仮定する.

空間1次元において3次の非線形項が臨界的な状況を示すことはよく知られている. この状況では, 一般に解の最大存在時刻T_εについて, ある$c > 0$を用いて$T_\varepsilon \geq \exp(c/\varepsilon^2)$が成り立つことしか分からないが, 非線形項に条件

$$N(e^{i\theta}, 0) = e^{i\theta} N(1, 0), \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

を課せば, T_ε についてのより詳細な評価が [4] で得られている. (2) を仮定し, (1) での初期条件を$u(0,x) = \varepsilon\psi(x)$, $\psi \in H^3 \cap H^{2,1}$ に置き換えたとき,

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (|\mathcal{F}\psi(\xi)|^2 \operatorname{Im} \nu(\xi))} \tag{3}$$

が成立する. ただし, $1/0 = +\infty$ と読み替える. ここで, $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は

$$\nu(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} N(z, i\xi z) \frac{dz}{z^2}$$

で定義される関数であり, $\mathcal{F}$ は Fourier 変換を表す.

(3) の右辺に注目すると, (1) の解の時間大域挙動が$\operatorname{Im} \nu(\xi)$ の符号に関係することが期待できる. 実際 [4] で, (2) の下での (1) に対する SDGE の成立や, 時間大域解の漸近挙動に関する先行結果が$\operatorname{Im} \nu(\xi)$ を用いて以下のようにまとめられることが指摘されている.

(i)

$$\operatorname{Im} \nu(\xi) \leq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{$\mathbf{A}$}$$

が成立するとき, $H^3 \cap H^{2,1}$ においてSDGEが成立する.

* e-mail: yoshinori.nishii@rs.tus.ac.jp

(ii) $(\mathbf{A})$ で等号が成り立つ, すなわち

$$\operatorname{Im}\nu(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{$\mathbf{A}_0$}$$

であるとき, 解の漸近形に対数型の位相の修正が現れる. つまり

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^+(x/t)\exp\left(\frac{ix^2}{2t} - i|\alpha^+(x/t)|^2 \operatorname{Re}\nu(x/t)\log t\right) + o(t^{-1/2})$$

が $t \to +\infty$ で $x \in \mathbb{R}$ について一様に成立する. ここで, $\alpha^+(\xi)$ は 適当な $\mathbb{C}$-値関数である.

(iii) $(\mathbf{A})$ で真の不等号が成り立つ, すなわち

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{Im}\nu(\xi) < 0, \tag{$\mathbf{A}_+$}$$

であるとき, $\|u(t)\|_{L^\infty} = O((t\log t)^{-1/2})$ が成立する.

条件 $(\mathbf{A})$ の下で, 解の L^2 の意味での長時間挙動について, $(\mathbf{A}_+)$ が満たされる場合には $\lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|_{L^2} = 0$ が成立し, 一方で, $(\mathbf{A}_0)$ の下では一般に $\lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|_{L^2} \neq 0$ が成立することが知られている. しかし, $(\mathbf{A}_+)$, $(\mathbf{A}_0)$ 以外の状況下での L^2-減衰/非減衰は連立系に対する [1], [2] を除いて知られていない. 本講演の目的は, $(\mathbf{A})$ は満たされるが, $(\mathbf{A}_+)$ と $(\mathbf{A}_0)$ は満たされない場合の解の挙動を明らかにすることである. 次が主結果である.

定理 ([3])**.** $\varepsilon = \|\varphi\|_{H^3\cap H^{2,1}}$ は十分小さいとし, (2) と $(\mathbf{A})$ は満たされるが $(\mathbf{A}_0)$ は満たされないと仮定する. このとき, 任意の $\delta > 0$ に対し, 正定数 C が存在して (1) の時間大域解 u に対して

$$\|u(t)\|_{L^2} \le \frac{C\varepsilon}{(1+\varepsilon^2\log(t+2))^{1/4-\delta}}, \quad t \ge 0.$$

が成立する.

さらに, 減衰率の最適性について最近得られた結果も併せて紹介する.

参考文献

[1] C. Li, Y. Nishii, Y. Sagawa, H. Sunagawa: to appear in Funkcialaj Ekvacioj.

[2] C. Li, Y. Nishii, Y. Sagawa, H. Sunagawa: Tokyo J. Math. (2021).

[3] C. Li, Y. Nishii, Y. Sagawa, H. Sunagawa: J. Evol. Equ. (2021).

[4] Y. Sagawa, H. Sunagawa: Discrete Contin. Dyn. Syst. (2016).