# ある移流拡散方程式の定数定常解の $L^p$ 空間における安定性について

和久井洋司　(東京理科大学)

$n \geq 1$ における, 次の移流拡散方程式に対する初期値問題の定数定常解の安定性について考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi + \lambda \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{DD}$$

ここで, $\lambda > 0$ であり $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \psi(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は未知関数である. この移流拡散方程式 (DD) の第二式は Helmholtz 方程式であることから $\psi = (\lambda - \Delta)^{-1} u$ で与えられているものとする. 移流拡散方程式は適当な枠組みにおいて解の性質を考えることにより, 質量保存則が成立する. すなわち, $u_0 \geq 0$ なる $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が適当な条件を満たせば, 対応する解 $u$ もほとんど至るところ $u \geq 0$ となり $\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1$ が成立する. こうした保存量は移流拡散方程式の解の時間大域挙動の解明に重要な役割を果たす一方, 全空間 $\mathbb{R}^n$ における可積分性に依拠した枠組みであることから, 方程式の構造から自然に導出される定数定常解 $u \equiv \lambda A$ $(A \in \mathbb{R})$ を含めることができない.

他方, べき乗型非線形項を持つ半線型熱方程式では, 初期値問題の時間局所解の存在性と初期値の局所的な特異性の強さの関係が Baras-Pierre [3] や Giga-Umeda [5] にて示されており, それらの先行研究で用いられている一様局所 Lebesgue 空間は定数関数を含む枠組みである. さらに先述の先行研究から, べき乗型非線形項を持つ半線型熱方程式において, 一様局所 Lebesgue 空間は初期値問題の時間局所解の存在·非存在を分類する枠組みとして適切である可能性が示唆されている. ここで, $1 \leq p \leq \infty$ に対して一様局所 Lebesgue 空間 $L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n)$ は $L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{p,\mathrm{uloc}} < \infty\}$ で定義される関数空間で, $p = \infty$ のときは $L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である. ただし,

$$\|f\|_{p,\mathrm{uloc}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{B_1(x)} |f(y)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{1/p}$$

である. 一様局所 Lebesgue 空間 $L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n)$ における熱半群の作用については多くの先行研究があり, 通常の Lebesgue 空間における熱半群の $L^p$-$L^q$ 型評価に対応する評価も知られている. ここで,

$$(\mathrm{e}^{t\Delta} f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, \mathrm{d}y$$

とする.

**命題 1** ([2], [6])**.** *任意の* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ *に対して, ある正の定数* $C_1 = C_1(n)$ *と* $C_2 = C_2(n,p,q,k,\alpha)$ *が存在して次が成立する:*

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha \mathrm{e}^{t\Delta} f\|_{p,\mathrm{uloc}} \leq t^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} (C_1 + C_2 t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}) \|f\|_{q,\mathrm{uloc}}, \quad t > 0.$$

命題 1 の熱半群の $L^p$-$L^q$ 型評価を用いることで, 次の Duhamel 項に対する双線形評価

(命題3) を得ることができ, よく知られた縮小写像の原理によって積分方程式

$$u(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}u_0-\int_0^t \nabla\cdot \mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\big(u(s)\nabla K * u(s)\big)\,\mathrm{d}s \quad \text{in } C((0,T);L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n)). \tag{IE}$$

の軟解の存在を示すことができる.

**定理 2** ([4, Theorem 2.1])**.**

$$\begin{cases} 1\le p\le\infty, & n=1,\\ \dfrac{3}{2}\le p\le\infty, & n=2,\\ \dfrac{n}{2}<p\le\infty, & n\ge 3.\end{cases} \tag{1}$$

とすると, 任意の $u_0\in L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して, ある時刻 $T>0$ と方程式 (DD) の一意な軟解 $u\in L^\infty(0,T;L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n))\cap C((0,T);L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n))$ が存在する. さらに $u_0\ge 0$ ならば, $u\ge 0$ がほとんど至る $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ で成立する.

定理2の証明の鍵となるのは, 次の双線形評価である.

**命題 3** (双線形評価)**.** $p$ は条件 (1) を満たすとする. このとき, ある $k\in(n,\infty]$ とある $C=C(p,k,n,K)>0$ が存在し,

$$\|\nabla \mathrm{e}^{\tau\Delta}\cdot(u\nabla K*v)\|_{p,\mathrm{uloc}}\le C\tau^{-\frac{1}{2}}(1+\tau^{-\frac{n}{2}\frac{1}{k}})\|u\|_{p,\mathrm{uloc}}\|v\|_{p,\mathrm{uloc}}$$

が成立する.

**注意.** $L^p$ 空間における Young の不等式に対応する不等式が $L^p_{\mathrm{uloc}}$ においても成立する. さらに, 指数 $p$ が定理2の条件 (1) を満たすとき, 任意の $A\in\mathbb{R}$ と任意の $v_0\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して, ある $T>0$ と $u_0=\lambda A+v_0\in L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする方程式 (DD) の一意な軟解 $u$ が存在し, $u-\lambda A\in C([0,T);L^p(\mathbb{R}^n))$ となることも, 定理2の系として得られる. より精密な $p$ に対する条件は [7] において調べられている.

さらに, 定数定常解 $u\equiv\lambda A$ の安定性を考察し, 次の結果を得た ([4, Theorem 2.3, Theorem 2.4]).

**定理 4.** $p$ は定理 *2* の条件 (1) を満たすとすると, 次が成立する.

1. $n=1$ のとき $p=1$, $n\ge 2$ のとき $\frac{n}{2}<p\le n$ とし, $n<q\le 2p$ を固定する. $0\le A<1$ ならば, 定数定常解 $u\equiv\lambda A$ は安定である. すなわち, ある $\epsilon_0>0$ が存在して, 任意の $v_0\in L^p(\mathbb{R}^n)$ で $\|v_0\|_p<\epsilon_0$ なるものに対し, $u_0=\lambda A+v_0$ を初期値とする方程式 (DD) の時間大域的な軟解 $u$ が一意に存在し, $u-\lambda A\in C([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^n))$ となり次の評価が成立する*:* ある $C>0$ が存在して

$$\sup_{t>0}\|u(t)-\lambda A\|_p+\sup_{t>0}t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u(t)-\lambda A\|_q\le C\|u_0-\lambda A\|_p.$$

2. $p\ne 1,\infty$ とする. $A>1$ ならば定数定常解 $u\equiv\lambda A$ は *Lyapunov* の意味で安定ではない.

**注意.** 定理4の2の主張は, 軟解$u$が時間大域的に存在するかどうかを述べておらず,「もし時間大域解が存在したとすれば, その解はLyapunovの意味で安定ではない」ということを主張している.

本発表では, 定数定常解の安定性について述べる. この研究は, Wrocław大学のS. Cygan氏, G. Karch氏およびK. Krawczyk氏との共同研究に基づく([4]).

## 参考文献


[1] Andreucci, D., DiBenedetto, E., *On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **18** (1991), pp. 363 – 441

[2] Arrieta, J. M., Rodriguez-Bernal, A., Cholewa, J. W., Dłotko, T., *Linear parabolic equations in locally uniform spaces*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), pp. 253 – 293.

[3] Baras, P., Pierre, M., *Non-uniform bound and finite time blow up for solutions to a drift-diffusion equation in higher dimensions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2** (1985), pp. 185 – 212.

[4] Cygan, S., Karch, G., Krawczyk, K., Wakui, H., *Stability of constant steady states of a chemotaxis model*, J. Evol. Equ. **21** (2021), pp. 4873 – 4896.

[5] Giga, Y., Umeda, N., *On instant blow-up for semilinear heat equations with growing initial data*, Methods Appl. Anal. **15** (2008), pp. 185 – 195.

[6] Maekawa, Y., Terasawa, Y., *The Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local $L^p$ spaces*, Differential Integral Equations **14** (2006), pp. 369 – 400.

[7] Suguro, T., *Well-posedness and unconditional uniqueness of mild solutions to the Keller-Segel system in uniformly local spaces*, J. Evol. Equ. **21** (2021), pp. 4599 – 4618.