

波束変換による修正波動作用素の構成

米山 泰祐 (よねやま たいすけ)

北里大学 一般教育部 数学単位

e-mail: t.yone26@kitasato-u.ac.jp

本講演では、以下の時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(t)u, & \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ である。また、 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ であり、以降作用素を考える空間は $L^2(\mathbb{R}^n)$ とする。 $V(t)$ はポテンシャルと呼ばれ関数 $V(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ をかける掛け算作用素で、長距離型条件すなわち、ある $0 < \varepsilon \leq 1$ があって、任意の多重指数 α に対し $C_\alpha > 0$ が存在して、

$$(2) \quad |\partial_x^\alpha V(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\varepsilon - |\alpha|}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

が成り立つと仮定する。

谷島 [8] により (1) の適切性が知られている。このとき、時刻 0 における初期状態 u_0 から時刻 t における状態 $u(t)$ を与える作用素を $U(t, 0)$ とおき、(1) に対する propagator と呼ぶ。

V が短距離型条件を満たす ((2) で $\varepsilon > 1$ となる) ときは古くからスペクトル理論やフーリエ変換により多くの研究がなされ、ポテンシャル V が時間に依存しない場合は波動作用素 $W_\pm := \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t)e^{it\Delta/2}$ が存在し、それらの値域が（絶対）連続スペクトル空間に一致することが知られている。(黒田 [6], Cook [1] 等) ポテンシャル V が時間に依存する場合も波動作用素は存在 (Yafaev [8]) し、それらの値域の特徴づけ (北田-谷島 [5], 米山-加藤 [9] 等) も得られている。

一方、 V が長距離型条件を満たすときは一般には波動作用素が存在しないことが知られている。しかし $e^{it\Delta/2}$ の部分を適当に修正することで、波動作用素と同様に散乱現象を解析できる修正波動作用素の存在や完全性が知られており、様々な修正波動作用素が考えられている (Hörmander [2], 磯崎-北田 [3], 北田-谷島 [5] 等)。本研究の目的は以下の波束変換を用いて新たな修正波動作用素を構成することである。

定義 (波束変換). $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'$ に対し、

$$W_\varphi f(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

と定める。

主結果は以下の通りである。

定理. 時間に依存するポテンシャル $V(t, x)$ に対し、(2) を仮定する。

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に対し

$$(3) \quad U_M(t, 0)f(x) = W_{\varphi(t)}^{-1} \left[e^{-i \int_0^t \left(\frac{1}{2} |\xi(s;t)|^2 + \tilde{V}(s, x(s;t)) \right) ds} W_\psi f(x(0;t), \xi) \right]$$

とおく。ここで、 $\varphi(t) = e^{it\Delta/2}\varphi$, $\tilde{V} = V - x \cdot \nabla_x V$ であり、 $x(s;t)$, $\xi(s;t)$ は

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s), & x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s, x(s)), & \xi(t) = \xi, \end{cases}$$

の解である ($\dot{x}$ は x の s による微分を表す).

このとき, 任意の $f \in \mathcal{D} := \mathcal{F}^{-1}[C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})]$ に対し, ある $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ があって, 以下の極限

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(0, t)U_M(t, 0)f$$

が存在する.

注. $f \in \mathcal{D}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ で稠密である. そのため, $U(t, 0)$, $U_M(t, 0)$ のユニタリー性を考えると (4) の極限の存在と波動作用素にある強極限の存在は “ほぼ” 同値である.

注. (3) の修正は加藤–小林–伊藤 [4] による自由シュレディンガー作用素 $e^{it\Delta/2}$ の波束変換による表現

$$e^{it\Delta/2}f(x) = W_{\varphi(t)}^{-1} \left[e^{-i\frac{1}{2}|\xi|^2 t} W_\psi f(x - t\xi, \xi) \right]$$

を元になっている.

なお本研究は加藤圭一氏 (東京理科大) との共同研究に基づくものである.

参考文献

- [1] J. Cook, Convergence to the Møller wave matrix. J. math. Phys. 36 (1957), 82–87.
- [2] Hörmander, L., The existence of wave operators in scattering theory. Math. Z. 146 (1976), no. 1, 69–91.
- [3] H. Isozaki and H. Kitada, Modified wave operators with time-independent modifiers. J. Fac. Sci. Uni. Tokyo Sect. IA Math. **32**, No. 1 (1985), 77–104.
- [4] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications, *Tohoku Math. J.* **64**, No. 2 (2012), 223–231.
- [5] H. Kitada, K. Yajima, A scattering theory for time-dependent long-range potentials, Duke Math. J. 49, (1982), 341–376.
- [6] S. T. Kuroda, Some remarks on scattering theory for Schrödinger operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser I, 17 (1970), 315–329.
- [7] D. R. Yafaev, On the violation of unitarity in time-dependent potential scattering, Soviet Math.
- [8] Yajima, K.: Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, Comm. Math. Phys. **110**, 415–426, (1987)
- [9] T. Yoneyama, K. Kato, Characterization of the ranges of wave operators for Schrödinger equations with time-dependent short-range potentials via wave packet transform, Funkcial. Ekvac. 63 (2020), no. 1, 19–37.