Lotka–Volterra競合モデルと 2種走化性方程式の解の関係

水上 雅昭　(京都教育大学)*

1. 序

本研究では, 競合項をもつ2種走化性方程式系の初期値境界値問題

$$
(1)\quad \begin{cases}
(u_\varepsilon)_t = \Delta u_\varepsilon - \varepsilon\nabla\cdot(u_\varepsilon\nabla w_\varepsilon) + \mu_1 u_\varepsilon(1-u_\varepsilon-a_1 v_\varepsilon), & x\in\Omega,\ t>0,\\
(v_\varepsilon)_t = \Delta v_\varepsilon - \varepsilon\nabla\cdot(v_\varepsilon\nabla w_\varepsilon) + \mu_2 v_\varepsilon(1-a_2 u_\varepsilon-v_\varepsilon), & x\in\Omega,\ t>0,\\
(w_\varepsilon)_t = \Delta w_\varepsilon - w_\varepsilon + u_\varepsilon + v_\varepsilon, & x\in\Omega,\ t>0,\\
\nabla u_\varepsilon\cdot\nu = \nabla v_\varepsilon\cdot\nu = \nabla w_\varepsilon\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
u_\varepsilon(x,0)=u_{\rm init}(x),\ v_\varepsilon(x,0)=v_{\rm init}(x),\ w_\varepsilon(x,0)=w_{\rm init}(x), & x\in\Omega
\end{cases}
$$

の解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon$ が $\varepsilon\searrow 0$ とするときにどのような関数に収束するのかを考える. ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\ge 2)$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル, $\varepsilon>0$, $\mu_1,\mu_2>0$, $a_1,a_2>0$ とし, $u_{\rm init}, v_{\rm init}\in C^0(\overline{\Omega})$, $w_{\rm init}\in W^{1,\infty}(\Omega)$ を非負関数とする. 問題 (1) で $\varepsilon=0$ とすると, u,v については次のような Lotka–Volterra 競合モデルの初期値境界値問題になる:

$$
(2)\quad \begin{cases}
u_t = \Delta u + \mu_1 u(1-u-a_1 v), & x\in\Omega,\ t>0,\\
v_t = \Delta v + \mu_2 v(1-a_2 u-v), & x\in\Omega,\ t>0,\\
\nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
u(x,0)=u_{\rm init}(x),\ v(x,0)=v_{\rm init}(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

これより, 問題 (1) の解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ は $\varepsilon\searrow 0$ とするとき, 問題 (2) の解 u,v にそれぞれ収束することが予想される. 上記の予想が正しいことを示すことができれば, 走化性の力が弱い場合に関しては問題 (1) の解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ と問題 (2) の解 u,v が十分近い性質があるということが期待される. ここで, 問題 (1) は Bai–Winkler [1], Lin–Mu–Wang [3] や [4] などにより研究されているが, 未解決問題が山積している. 一方, Lotka–Volterra 競合モデルに対する問題 (2) は既に多くの研究がされている. そのため, 本研究の進展により, 走化性方程式の解の新たな性質が解明できることが期待される.

1種の生物の場合 (問題 (1), (2) で $v_\varepsilon = v = 0$ の場合) に, 走化性項の係数 $\varepsilon>0$ を $\varepsilon\searrow 0$ とするとき走化性方程式の解 u_ε が Fisher–KPP 方程式の解 u に時間大域的に一様収束することが示されている ([2]). 一方, 2種の生物の場合である問題 (1) についてはまだ研究されていない. 本研究の目的は, 走化性方程式と Lotka–Volterra 競合モデルの解の関係を明らかにすることである. 特に, 問題 (1) において走化性項の係数 $\varepsilon>0$ を $\varepsilon\searrow 0$ とすることにより, 問題 (1) の解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ が問題 (2) の解 u,v にそれぞれ収束することを示す.

* e-mail: mmizu@kyokyo-u.ac.jp

2. 主結果

本研究では, 走化性方程式の解とLotka–Volterra競合モデルの解の関係に関する次の2つの結果を得た.

定理1

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ はなめらかな境界をもつ有界凸領域, $\mu_1, \mu_2, a_1, a_2 > 0$ を定数とし, $u_{\rm init}, v_{\rm init} \in C^0(\overline{\Omega})$, $w_{\rm init} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ を非負関数とする. このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, すべての $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して非負関数

$$\begin{aligned}
&u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),\\
&v_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),\\
&w_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) \cap L^\infty_{\rm loc}([0,\infty); W^{1,\infty}(\Omega))
\end{aligned}$$

が一意的に存在し, 問題(1)の古典解となる. さらに, 任意の $T > 0$ に対してある $C(T) > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して問題(1)の解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ と問題(2)の解 $u, v \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ が次を満たす:

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{t\in(0,T)} \|v_\varepsilon(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(T)\varepsilon.$$

定理2

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ はなめらかな境界をもつ有界凸領域, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $a_1, a_2 \in (0,1)$ または $a_1 > 1 > a_2 > 0$ を定数とし, $u_{\rm init}, v_{\rm init} \in C^0(\overline{\Omega})$, $w_{\rm init} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ を非負関数とする. このとき, ある $\varepsilon_1 > 0$ と $C > 0$ が存在して, すべての $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対して問題(1)の時間大域的古典解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ と問題(2)の時間大域的古典解 u, v が次を満たす:

$$\sup_{t\in(0,\infty)} \|u_\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{t\in(0,\infty)} \|v_\varepsilon(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\varepsilon.$$

定理1は, "$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, 走化性方程式の解とLotka–Volterra競合モデルの解は十分近い" ということを表している. さらに, 定理2により, $a_1, a_2 \in (0,1)$ および $a_1 > 1 > a_2 > 0$ の場合に, $\varepsilon \searrow 0$ とするとき走化性方程式の解 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ がLotka–Volterra競合モデルの解 u, v に時間大域的に一様収束することがわかった.

参考文献

[1] X. Bai, M. Winkler, *Equilibration in a fully parabolic two-species chemotaxis system with competitive kinetics*, Indiana Univ. Math. J. **65** (2016), 553–583.

[2] J. Lankeit, M. Mizukami, *How far does small chemotactic interaction perturb the Fisher–KPP dynamics?*, J. Math. Anal. Appl. **452** (2017), 429–442.

[3] K. Lin, C. Mu, L. Wang, *Boundedness in a two-species chemotaxis system*, Math. Methods Appl. Sci. **38** (2015), 5085–5096.

[4] M. Mizukami, *Improvement of conditions for asymptotic stability in a two-species chemotaxis-competition model with signal-dependent sensitivity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **13** (2020), 269–278.