反応拡散方程式の非有界な進行波解

伊藤 涼（神奈川大学理学部）

適応度の高い遺伝子が世代交代により伝わり広がる様子や，生物種が新天地で棲息域を広げる様子など，自然界には数多くの伝播現象が観測される．このような現象を “増殖とランダムな拡散を伴う過程” とみなすことで，反応拡散方程式によって数学的に説明できることがある．例えば外来生物種が棲息域を広げていく様子は，生物種の繁栄と衰微を意味する 2 つの定常状態の推移として，特殊解—進行波解—で理解することができる．

本稿では，特殊な形の非線型項をもつ反応拡散方程式の進行波解について考察する．

$$u_t = u_{xx} + f(u),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1}$$

外来生物種の侵入モデルにおいては，$u(x,t)$ は位置 x，時刻 t での生物種の個体数密度，非線型項 $f(u) = g(u)u$ の $g(u)$ は生物種の増加率をそれぞれ記述している．

増加率を表す関数としては，例えば $g(u) = r(1-u/k)$, $(u-a)(k-u)$（ただし $r > 0$, $0 < a < k$）などが考えられてきた．このような $f(u) = g(u)u$ に対しては，定常解 $u \equiv 0$ と $u \equiv k$ をつなぐ進行波解（以下，本稿では $0 \sim k$ 進行波と呼ぶ．図 1 を参照）の存在とその性質について様々な立場から研究されている．それでは，非線型項 $f(u)$ をいろいろ動かして，安定な定常解 $u \equiv k$ が無限大になってしまう場合を考えるとどうなるだろうか？(図 2 を参照)

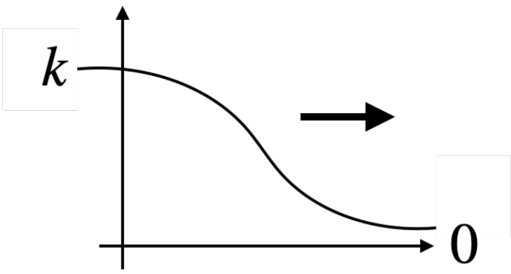

図 1: 0 と k をつなぐ進行波解のイメージ図．進行波解とは，波形を変えずに一定の速度 $c > 0$ で進む解のことで，数学的には $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ という形で書ける解のことである．

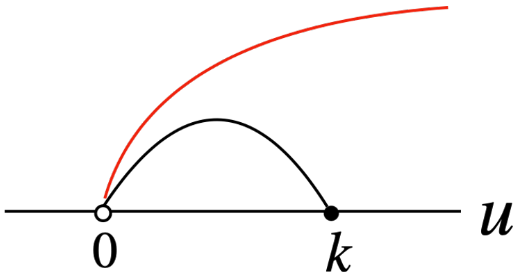

図 2: 赤い曲線が本稿で考察する非線型項の例．黒の曲線が単安定型の非線型項の例で，$u = k$ を安定点としてもつ．これをいろいろ動かして $k \to \infty$ となる場合を考えている．

具体的には，非線型項 $f(u)$ には次の条件を課す．

(f1) $f \in C^1([0,\infty))$, $f(0) = 0$

(f2) $f(u) > 0$ $(u > 0)$

(f3) $\displaystyle\limsup_{u\to\infty} \frac{|f(u)|}{u} < \infty$

この条件のもとで，不安定定常解 $u \equiv 0$ と無限大をつなぐ単調な進行波解の存在を考える．本論の目標は，今までの解析では抜け落ちていたように見える非線型項に対する反応拡散方程式を考察することによって，非有界な進行波解の理論を整備することである．

なお，無限大が安定な双安定型の非線型項に対しては，安定な定常解と無限大をつなぐ進行波解の存在，および最小速度（最も遅い進行波解の速度）が定まることが筆者らによって示されている．つまり，ある定数よりも大きい数 $c>0$ に対して，速度 c をもつ進行波解の存在が示されている．通常の双安定型の非線型項に対しては，2 つの安定な定常解をつなぐ進行波解はただ 1 つのみ存在するので，安定点が無限大となることで進行波の数が増えていることがわかる．

以下，単安定型の非線型項に対する単調な進行波解に的を絞って述べる．本稿で扱っている非線型項の簡単な例として $f(u)=ru$ がある．この場合は考えている方程式が線型となるので，具体的に解を求めることができる．$u(x,t)=\varphi(x-ct)$ とおいて計算すると，非線型項 $f(u)=ru$ に対しての $0\sim\infty$ 進行波は

$$u(x,t)=\alpha_1 e^{\lambda_+(x-ct)}+\alpha_2 e^{\lambda_-(x-ct)},\ \lambda_\pm:=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4r}}{2},\ \alpha_1,\ \alpha_2 \text{ は任意定数}$$

となることがわかる．$\varphi(z)$ が正値単調関数となるためには $\lambda_\pm$ が実数である必要があるので，速度 c の単調な $0\sim\infty$ 進行波は $c\geq 2\sqrt{r}$ の場合に存在する．この例においては最小速度が $2\sqrt{r}$ として定まり，$c>2\sqrt{r}$ であれば同じ速度の進行波が無数に存在するが，本稿の設定においても同じことを示すことができたので報告する．

主定理

非線型項 $f(u)$ に (f1)-(f3) を仮定する．このとき，次の主張が成立する．

(1) 定数 $c_f^*>0$ で次の条件をみたすものが存在する．

“$c>c_f^*$ ならば単調な $0\sim\infty$ 進行波が存在して，$c<c_f^*$ ならば存在しない”

(2) 各 $c>c_f^*$ に対して，$0\sim\infty$ 進行波は無限に存在する．

ここで速度 $c>0$ の $0\sim\infty$ 進行波とは $u(x,t)=\varphi(x-ct)$ という形の (1) の解である．ただし，$\varphi(z)$ $(z=x-ct)$ は次の問題の解とする．

$$\begin{cases} \varphi''+c\varphi'+f(\varphi)=0, \\ \varphi'(z)<0\ (z\in\mathbb{R}),\ \varphi(\infty)=0,\ \varphi(-\infty)=\infty. \end{cases} \tag{2}$$

通常の単安定型の非線型項に対しては，単調な進行波解は 1 つの速度 $c\geq c_f^*$ に対して 1 つのみ存在することを注意する [4].

以上で安定点が無限大になる場合は単安定型・双安定型のどちらの場合も最小速度が定まることを紹介した．双安定型などの特別な非線型項を考えていると，メカニズムが見えにくく不思議なことが成り立っているように思えるかもしれないが，実はもっと広いクラスの非線型項に対して非有界な進行波解が存在することがわかる．

本論では，個々別々の非線型項の形に依存しない理論展開についても説明する．非有界な進行波解という枠組みのなかでは最小速度が定まることは自然なことで，双安定型の非線型項は特別な場合を考えているに過ぎないのである．

新しい視点で進行波解の古典的理論を見つめ直せば，進行波解の速度に関する公式を統一的に記述することができる．

本講演の内容は二宮広和氏（明治大学）との共同研究に基づく．

参考文献

[1] R. A. Fisher, *The advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics, 7 (1937), 355-369.

[2] K. P. Hadeler and F. Rothe, *Travelling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biol., 2 (1975), 251-263.

[3] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky and N. S. Piskunov, *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un probléme biologique*, Bulletin Université d'Etat à Moscou, Série internationale A 1 (1937), 1-26.

[4] 二宮 広和，侵入・伝播と拡散方程式, 共立出版，2014.