Global solutions for the incompressible rotating MHD equations in the scaling critical Sobolev space

髙田　了（東京大学 大学院数理科学研究科）

3 次元全空間において，回転による Coriolis 力の影響を考慮した非圧縮性磁気流体方程式の初期値問題を考察する．

$$
(\mathrm{MHD})_\Omega \begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + \Omega e_3 \times u & \\ \quad +(u\cdot\nabla)u + \nabla p - (B\cdot\nabla)B = 0 & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \partial_t B - \Delta B + (u\cdot\nabla)B - (B\cdot\nabla)u = 0 & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot B = 0 & t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ u(0,x)=u_0(x), \quad B(0,x)=B_0(x) & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}
$$

ここで，$u=(u_1(t,x),u_2(t,x),u_3(t,x))$ は流体の速度場，$B=(B_1(t,x), B_2(t,x),B_3(t,x))$ は磁場，$p=p(t,x)$ は圧力を表す未知関数である．定数 $\Omega\in\mathbb{R}$ は $e_3=(0,0,1)$ 軸周りでの流体の回転速度を表すパラメータであり，$\nu>0$ は粘性係数である．

本講演では，スケール臨界な関数空間 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ における $(\mathrm{MHD})_\Omega$ の時間大域解の存在と一意性について考察する．パラメータ $\lambda>0$ に対して，

$$
(u_\lambda,B_\lambda)(t,x)=\lambda(u,B)(\lambda^2 t,\lambda x), \quad p_\lambda(t,x)=\lambda^2 p(\lambda^2 t,\lambda x), \quad \Omega_\lambda=\lambda^2\Omega
$$

とスケール変換を定める．このとき，(u,B,p) が $(\mathrm{MHD})_\Omega$ の解ならば $(u_\lambda,B_\lambda,p_\lambda)$ は $(\mathrm{MHD})_{\Omega_\lambda}$ の解となり，

$$
\|(u_\lambda,B_\lambda)(0,\cdot)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s+1-\frac{n}{2}}\|(u,B)(0,\cdot)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}
$$

が成立する．従って，3 次元において，初期値に関するスケール臨界な Sobolev 空間は $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ となる．

方程式 $(\mathrm{MHD})_\Omega$ は磁場の影響が無い場合（$B\equiv 0$）は 3 次元 Coriolis 力付き非圧縮性 Navier-Stokes 方程式となる．この方程式に対するスケール臨界な関数空間における先行研究では，Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier [2] により，関数空間 $L^2(\mathbb{R}^2)^3+\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)^3$ に属する大きな初期速度場に対して，回転速度 $|\Omega|$ が十分大きい場合の時間大域解の一意存在，および回転速度を無限大とする特異極限における解の 2 次元流への収束が証明されている．一方，方程式 $(\mathrm{MHD})_\Omega$ に対する先行研究では，Ahn-Kim-Lee [1], Kim [4] により，スケール劣臨界な関数空間 $H^s(\mathbb{R}^3)$ $(s>1/2)$ に

属する大きな初期値に対して，回転速度 $|\Omega|$ が十分大きい場合の時間大域解の一意存在が証明されている．本研究では，スケール臨界な関数空間 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ に属する大きな初期速度場および初期磁場に対して，$(\mathrm{MHD})_\Omega$ の時間大域解の存在と一意性に関して考察を行った．

定理 1. $u_0, B_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)^3$ は非圧縮性条件 $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot B_0 = 0$ を満たすとする．このとき，ある正定数 $\omega = \omega(u_0, B_0)$ が存在して，$|\Omega| \geqslant \omega$ を満たす全ての回転速度 $\Omega \in \mathbb{R}$ に対して，方程式 $(\mathrm{MHD})_\Omega$ は以下のエネルギークラスにおいて時間大域解 u, B を一意にもつ：

$$u, B \in C([0,\infty); \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))^3.$$

注意 2. 定理 1 は初期磁場 $B_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)^3$ が十分小さい場合は，[3] での解析手法を適用することにより証明することが出来る．本研究では大きな初期磁場を取り扱うために，速度場に対する以下の外力項付き線形方程式を導入する：

$$\begin{cases} \partial_t u^L - \nu \Delta u^L + \Omega \mathbb{P}(e_3 \times u^L) = \mathbb{P}\left[\left(e^{t\Delta} B_0 \cdot \nabla\right) e^{t\Delta} B_0\right], \\ \nabla \cdot u^L = 0, \\ u^L(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

ここで $\mathbb{P}$ は Helmholtz 射影作用素である．このとき，Coriolis 力の有する分散性を用いることにより，時空間積分評価 $\lim\limits_{|\Omega|\to\infty} \|u^L\|_{L^4(0,\infty;\dot{W}^{\frac{1}{2},3}(\mathbb{R}^3))} = 0$ を証明する．これにより，線形解からの摂動 $u - u^L$, $B - e^{t\Delta}B_0$ に対する時間大域的エネルギー評価を確立し，主結果を証明することが出来る．

本講演内容は米田慧司氏（九州大学）との共同研究に基づく．

参考文献

[1] J. Ahn, J. Kim, and J. Lee, *Global solutions to 3D incompressible rotational MHD system*, J. Evol. Equ. **21** (2021), 235–246.

[2] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, *Anisotropy and dispersion in rotating fluids*, Stud. Math. Appl., vol. 31, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 171–192.

[3] T. Iwabuchi and R. Takada, *Global solutions for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Math. Ann. **357** (2013), 727–741.

[4] J. Kim, *Rotational effect on the asymptotic stability of the MHD system*, J. Differential Equations **319** (2022), 288–311.