

局所的優線形な非線形楕円型方程式の正值解の存在と漸近挙動について

足達慎二（静岡大学 工学部）adachi@shizuoka.ac.jp

本講演は慶應義塾大学の生駒典久氏, 京都産業大学の渡辺達也氏との共同研究に基づく. 次の Schrödinger 型の非線形楕円型方程式を考える:

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (1)$$

ここで, $N \geq 1$ とし, $\lambda > 0$ が十分に大きい場合に正值解 u_λ の存在を議論する. さらに, $\lambda \rightarrow \infty$ としたときの u_λ の漸近挙動について考察する. 非線形項 f について原点付近でのみ優線形の条件を課し, 無限遠方での増大度条件を課さずに (1) の正值解の存在と漸近挙動を議論することが目的である. f および V に対する仮定は以下である.

$$(f1) \quad f \in C(\mathbb{R}), \quad f(s) \equiv 0 \quad (s \leq 0).$$

$$(f2) \quad \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(s)}{s} = 0.$$

$$(f3) \quad \exists p \in (2, 2^*) \text{ s.t. } \liminf_{s \rightarrow 0+} \frac{F(s)}{s^p} > 0. \quad \text{ここで, } F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad 2^* := \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & (N \geq 3), \\ \infty & (N = 1, 2). \end{cases}$$

$$(f4) \quad \exists s_1 > 0 \text{ s.t. } f(s)s - 2F(s) > 0 \quad (s \in (0, s_1]).$$

$$(V1) \quad V \in C(\mathbb{R}^N), \quad \exists V_0 > 0 \text{ s.t. } \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_0.$$

$$(V2) \quad \exists V_\infty > 0 \text{ s.t. } \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V_\infty.$$

$$(V3) \quad V(x) \leq V_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

以上の仮定の下で (1) の正值解の存在について次を得た.

定理 1 (正值解の存在). $(f1)-(f4)$, $(V1)-(V3)$ を仮定する. このとき, ある $\lambda_0 > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \geq \lambda_0$ に対して (1) は少なくともひとつ正值解 u_λ を持つ.

次に定理 1 で得られた正值解 u_λ の $\lambda \rightarrow \infty$ としたときの漸近的プロファイルを調べるために, 非線形項 f に対して次を仮定する:

$$(f5) \quad \exists p \in (2, 2^*) \text{ s.t. } \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 1.$$

f が (f5) を満たせば, f は (f2)-(f4) を満たすことに注意されたい.

定理 2 (正值解の漸近挙動). $(f1)$, $(f5)$, $(V1)-(V3)$ を仮定する. $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ を定理 1 で得られた (1) の正值解の族とする. このとき, 次が成立する:

case a: $V(x) \not\equiv V_\infty$ の場合. $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす任意の $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ に対して, 部分列をとると (部分列も (λ_n) と表す),

$$v_{\lambda_n}(x) := \lambda_n^{\frac{1}{p-2}} u_{\lambda_n}(x) \rightarrow v_\infty(x) \quad \text{strongly in } H^1(\mathbb{R}^N)$$

が成立する. ここで, $v_\infty \in H^1(\mathbb{R}^N)$ は

$$-\Delta v + V(x)v = v^{p-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の正值解である.

case b: $V(x) \equiv V_\infty$ の場合. $(x_\lambda)_{\lambda \geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ が存在して,

$$\|v_\lambda(\cdot + x_\lambda) - \omega_0\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

が成立する. ここで, $v_\lambda(x) := \lambda^{\frac{1}{p-2}} u_\lambda(x)$ であり, $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ は

$$-\Delta v + V_\infty v = v^{p-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の一意正值球対称正值解である.

以下, 定理 1 および 2 の証明のアイデアを述べる. 通常, 方程式 (1) に対して変分的アプローチをとる際は非線形項の増大度として Sobolev 劣臨界増大度を仮定するが, 本講演では非線形項の無限遠方での増大度に関して何も仮定していないので, まず f を適切な増大度を持つ性質の良い関数 g に修正する. 修正のポイントは十分小さい $s > 0$ に対して $g(s) \equiv f(s)$ とすることと, $g(s)$ は Sobolev 劣臨界増大度とすることである. このように修正した関数 g を用いて, 修正方程式

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda g(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

を考える. この修正方程式の正值解 u_λ で $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) を満たすものを見つけると定理 1 の証明が完了する. 定理 2 については concentration compactness 原理を用いて証明する. 詳細は講演中に述べる.

参考文献

- [AIW] S. Adachi, N. Ikoma, T. Watanabe, *Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a class of locally superlinear Schrödinger equation*, submitted.
- [AW22] S. Adachi, T. Watanabe, *G-invariant positive solutions for a class of locally superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. **507** (2022), Art.125765, 20pp.
- [AS21] C. Alves and M. Souto, *Existence of solution for a class of problem in whole $\mathbb{R}^N$ without the Ambrosetti-Rabinowitz condition*. Manuscripta Math. **165** (2021), 453–468.
- [CW04] D. G. Costa, Z. Q. Wang, *Multiplicity results for a class of superlinear elliptic problems*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004), 787–794.
- [DMS08] J. M. do Ó, E. Medeiros, U. Severo, *On the existence of signed and sign-changing solutions for a class of superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 432–445.