

微分型非線形シュレディンガー方程式 系の基底状態の存在と安定性について

平山 浩之 (宮崎大学 教育学部)*

本講演では, 非線形シュレディンガー方程式系

$$(NLSS) \begin{cases} (i\partial_t + \alpha\Delta)u_1 = -(\nabla \cdot u_3)u_2, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ (i\partial_t + \beta\Delta)u_2 = -(\nabla \cdot \overline{u_3})u_1, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ (i\partial_t + \gamma\Delta)u_3 = \nabla(u_1 \cdot \overline{u_2}), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

の初期値問題について考える. ここで α, β, γ は 0 でない実定数であり, 未知関数 $U = (u_1, u_2, u_3)$ は $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ に値を取るベクトル値関数である. 初期値はソボレフ空間

$$\mathcal{H}^1 := (H^1(\mathbb{R}^d))^d \times (H^1(\mathbb{R}^d))^d \times (H^1(\mathbb{R}^d))^d$$

に与える. (NLSS) は Colin-Colin [1] によって, レーザーとプラズマの相互作用を記述するモデルとして導出されたものであり, 次の保存量を持つ.

$$\begin{aligned} M(U) &:= \|u_1\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{L_x^2}^2, \\ E(U) &:= \frac{\alpha}{2}\|\nabla u_1\|_{L_x^2}^2 + \frac{\beta}{2}\|\nabla u_2\|_{L_x^2}^2 + \frac{\gamma}{2}\|\nabla u_3\|_{L_x^2}^2 + \operatorname{Re}(u_3, \nabla(u_1 \cdot \overline{u_2}))_{L_x^2}, \\ \mathbf{P}(U) &:= (P_1(U), \dots, P_d(U)), \quad P_k(U) := -\sum_{j=1}^3 \operatorname{Re}(iu_j, \partial_k u_j)_{L_x^2} \quad (k = 1, \dots, d). \end{aligned}$$

(NLSS) の構造はパラメーター α, β, γ の値によって異なることが先行研究によって調べられている. 特に, $1 \leq d \leq 3$ かつ $(\beta + \gamma)(\alpha - \gamma) \neq 0$ であれば, $\mathcal{H}^1$ において時間局所的適切であることが [3], [4] において示されている. 一方で, 時間大域的適切性および解の長時間挙動については十分小さな初期値に対するものしか得られていない. また, 孤立波解の存在およびその安定性について, [1] において未解決問題として指摘されている.

本講演の目的は, 安定性の観点から (NLSS) の解の長時間挙動を明らかにすることである. そこで, $\omega \in \mathbb{R}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)) = (e^{2i\omega t}\varphi_1(x - \mathbf{c}t), e^{i\omega t}\varphi_2(x - \mathbf{c}t), e^{i\omega t}\varphi_3(x - \mathbf{c}t))$$

と置いて (NLSS) に代入すると, 次の定常問題が得られる.

$$(SP) \begin{cases} -\alpha\Delta\varphi_1 + 2\omega\varphi_1 + 2i(\mathbf{c} \cdot \nabla)\varphi_1 = (\nabla \cdot \varphi_3)\varphi_2, \\ -\beta\Delta\varphi_2 + \omega\varphi_2 + 2i(\mathbf{c} \cdot \nabla)\varphi_2 = (\nabla \cdot \overline{\varphi_3})\varphi_1, \\ -\gamma\Delta\varphi_3 + \omega\varphi_3 + 2i(\mathbf{c} \cdot \nabla)\varphi_3 = -\nabla(\varphi_1 \cdot \overline{\varphi_2}). \end{cases}$$

この連立系は, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{H}^1$ に対して定義される作用汎関数

$$S_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) := E(\Phi) + \omega M(\Phi) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{P}(\Phi)$$

* 〒889-2192, 宮崎県宮崎市学園木花台 1-1
e-mail: h.hirayama@cc.miyazaki-u.ac.jp

を用いると,

$$\partial_{u_1} S_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = \partial_{u_2} S_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = \partial_{u_3} S_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = 0$$

と表すことが出来る. そこで, 汎関数 $K_{\omega, \mathbf{c}}$ を

$$K_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = \partial_{\lambda} S_{\omega, \mathbf{c}}(\lambda \Phi)|_{\lambda=1}$$

により定めると, 定常問題 (SP) の解 Φ は $K_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = 0$ を満たす. 定常問題 (SP) の非自明解で作用 $S_{\omega, \mathbf{c}}$ を最小にするものを基底状態と呼ぶことにし, 次の最小化問題を考える.

$$\mu_{\omega, \mathbf{c}} := \inf\{S_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) | \Phi \in \mathcal{H}^1 \setminus \{(0, 0, 0)\}, K_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = 0\},$$

$$\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}} := \{\Phi \in \mathcal{H}^1 \setminus \{(0, 0, 0)\} | S_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = \mu_{\omega, \mathbf{c}}, K_{\omega, \mathbf{c}}(\Phi) = 0\}.$$

ここで, 本講演の主結果を述べる. そこで重要な役割を果たすのが次の量である.

$$\sigma := \max \left\{ \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \right\} = (\min\{2\alpha, \beta, \gamma\})^{-1}$$

定理 1 (基底状態の存在). $1 \leq d \leq 3$ とし, $\alpha, \beta, \gamma > 0, \omega > \sigma|\mathbf{c}|^2$ とする. このとき, $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}} \neq \emptyset$ であり, $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}$ の要素は基底状態となる.

定理 2 (時間大域的適切性). $1 \leq d \leq 3$ とし, $\alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha \neq \gamma, \omega > \sigma|\mathbf{c}|^2$ とする. このとき, $U_0 \in \mathcal{H}^1$ が $S_{\omega, \mathbf{c}}(U_0) < \mu_{\omega, \mathbf{c}}$ かつ $K_{\omega, \mathbf{c}}(U_0) > 0$ を満たせば, (NLSS) の時間局所解は時間大域的に延長可能である.

定理 3 (基底状態の安定性). $d = 1, \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha \neq \gamma, \omega > \sigma|\mathbf{c}|^2$ とし,

$$\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}^* := \{\Phi \in \mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}} | E(\Phi) < \mu_{\omega, \mathbf{c}}\}$$

と置く. もし $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}^* \neq \emptyset$ であれば, $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}^*$ は軌道安定である. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $U_0 \in \mathcal{H}^1$ が $\inf_{\Phi \in \mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}^*} \|U_0 - \Phi\|_{\mathcal{H}^1} < \delta$ を満たせば, U_0 を初期値とする (NLSS) の時間局所解 U は時間大域的に延長可能であり, $\inf_{\Phi \in \mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}^*} \|U(t) - \Phi\|_{\mathcal{H}^1} < \epsilon$ が任意の $t > 0$ に対して成立する.

注意 4. (i) $\alpha, \beta, \gamma < 0$ の場合も同様の結論が得られる.

(ii) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ のとき, $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{0}}^* = \mathcal{M}_{\omega, \mathbf{0}}$ となる. (したがって $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{0}}^* \neq \emptyset$ である.)

主定理の証明には, [2] において単独の微分型非線形シュレディンガー方程式に適用された変分的手法を用いる. ただし (NLSS) では, 定常問題の解を具体的に書き下せないという難しさが生じる. 安定性が $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}$ 全体ではなくその部分集合 $\mathcal{M}_{\omega, \mathbf{c}}^*$ に限定されているのはそのためである. なお, 本研究は池田正弘氏 (理化学研究所) との共同研究に基づく.

参考文献

- [1] M. Colin and T. Colin, *On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions*, Differential Integral Equations., **17** (2004), 297–330.
- [2] M. Colin and M. Ohta, *Stability of solitary waves for derivative nonlinear Schrödinger equation*, Ann. I. H. Poincaré, **23** (2006), 753–764.
- [3] H. Hirayama, *Well-posedness and scattering for a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations with low regularity initial data*, Comm. Pure Appl. Anal., **13** (2014), 1563–1591.
- [4] H. Hirayama, S. Kinoshita, and M. Okamoto *Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations in almost critical spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **499** (2021).