

# Kobayashi–Warren–Carter システムに 対する時間周期解

久保田 翔大 (神奈川大学工学部)\*

**導入.**  $0 < T < \infty$ ,  $N \in \{1, 2, 3\}$  とする.  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  を境界  $\Gamma := \partial\Omega$  がリプシッツ連続である有界領域とし,  $\Gamma$  上の外向き単位法線ベクトルを  $n_\Gamma$  と表す. また,  $Q := (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma := (0, T) \times \Gamma$ ,  $X := L^2(\Omega)$  とおく. 以上を踏まえた上で, 以下の連立偏微分方程式系 (S) を考える.

(S) :

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \kappa^2 \Delta \eta + g(\eta) + \alpha'(\eta) |\nabla \theta| = u(t, x), & (t, x) \in Q, \\ \nabla \eta \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), & x \in \Omega; \\ \alpha_0(\eta) \partial_t \theta - \operatorname{div} \left( \alpha(\eta) \frac{D\theta}{|D\theta|} + \nu^2 \nabla \theta \right) + M\theta = v(t, x), & (t, x) \in Q, \\ \left( \alpha(\eta) \frac{D\theta}{|D\theta|} + \nu^2 \nabla \theta \right) \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma, \\ \theta(0, x) = \theta_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

(S) は論文 [1] において提案された結晶粒界のフェーズ・フィールドモデルに基づいている. (S) における未知関数  $[\eta, \theta] \in L^2(0, T; [X]^2)$  は, それぞれ結晶の配向度, 結晶方位角に対応している.  $g \in C^2(\mathbb{R})$  は与えられたリプシッツ連続な摂動項である. また,  $0 < \alpha_0 \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$ ,  $0 < \alpha \in C^2(\mathbb{R})$  は結晶粒界の駆動力を表す与えられた関数であり,  $\alpha'$  は  $\alpha$  の微分を表す.  $\kappa > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $M > 0$  を与えられた定数,  $\eta_0 = \eta_0(x)$ ,  $\theta_0 = \theta_0(x)$  を与えられた初期値,  $[u, v] \in L^2(0, T; [X]^2)$  を (S) の外力項とする. 特に  $u$  は結晶粒界運動を制御する温度と対応している.

今回は, (S) の時間周期解について得られた結果を報告する. 方針としては, まず時間離散スキームにおいて時間周期解を考える. そして, 先行研究 [2, 3] を参考に, 時間離散スキームの連続系システム (S) への極限移行によって (S) の時間周期解を得る.

なお, 本講演は千葉大学の白川 健氏との共同研究に基づく.

## 参考文献

- [1] Ryo Kobayashi, James A. Warren, and W. Craig Carter. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, 140(1-2):141–150, 2000.
- [2] Salvador Moll and Ken Shirakawa. Existence of solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 51(3-4):621–656, 2014.
- [3] Salvador Moll, Ken Shirakawa, and Hiroshi Watanabe. Energy dissipative solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Nonlinearity*, 30(7):2752–2784, 2017.

\* 〒 221-8686 神奈川県横浜市神奈川区六角橋 3-27-1 神奈川大学工学部  
e-mail: skubota@kanagawa-u.ac.jp