多安定型非線形項をもつ非線形 Stefan 問題について

松澤　寛（神奈川大学　理学部）

本講演は科研費（課題番号:17K05340, 20K03709）の助成を受けたものである．また，兼子裕大氏（日本女子大学），山田義雄名誉教授（早稲田大学）との共同研究に基づく．

本講演では高次元空間における次の反応拡散拡散方程式の Stefan 問題を考える：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & t > 0,\ x \in \Omega(t), \\ u(t,x) = 0, \quad u_t = \mu |\nabla_x u|^2, & t > 0,\ x \in \partial\Omega(t) \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{FBP}$$

ここで，非線形項 f は

$$\begin{aligned} & f \in C^2([0,\infty)]),\ f(0) = 0, \\ & \text{ある } K > 0 \text{ が存在して } f(K) = 0,\ f(u) < 0\ (u > K) \end{aligned} \tag{F}$$

をみたす関数，$\mu > 0$ は与えられた定数である．この問題で領域 $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ の境界 $\Gamma(t)(= \partial\Omega(t))$ を**自由境界**とよぶ．また，$\Omega(0) = \Omega_0$ は境界 $\partial\Omega_0$ が滑らかな有界領域とし，u_0 は

$$\mathscr{I}(\Omega_0) = \left\{\phi \in C(\overline{\Omega_0}) \cap H^1(\Omega_0) : \phi(x) > 0 \text{ in } \Omega_0,\ \phi(x) = 0 \text{ on } \partial\Omega_0\right\}$$

に属するとする．この問題は 2010 年に空間 1 次元（$N = 1$）の場合（この場合，$\Omega(t) = (g(t), h(t)) \subset \mathbb{R}$）に Du-Lin [1] により数理生態学における外来種侵入問題のモデルとして導入され，それ以来，多くの研究がなされてきた．空間高次元の問題は球対称の場合，Du-Guo [3] や Du-Matsuzawa-Zhou [5], Du-Lou-Zhou [2] などにより研究されている．対称性を仮定しない (FBP) については Du-Guo [4] は弱解を定義し，f が (F) を満たすとき，弱解の存在と一意性，さらに大域性を示している．自由境界 $\Gamma(t)$ と $u(t,x)$ の正則性については Du-Matano-Wang [6] により研究されている．この自由境界問題において次のような問題を考える：

問題 $\Omega(t)$ と $u(t,x)$ の時間無限大での漸近挙動を調べよ．

もちろん，この問題は考える非線形項 f により大きく異なるが，f が (F) という条件のみで成り立つ結果を次に述べる．まず自由境界の滑らかさについて次のことが知られている：

定理 1 (Du-Matano-Wang [6])**.** (F) を仮定する．

- 任意の $t > 0$ に対して，$\tilde{\Gamma}(t) := \Gamma(t) \setminus \overline{\mathrm{co}}(\Omega_0)$ は $\mathbb{R}^N$ の $C^{2,\alpha}$ 級超曲面，ここで $\overline{\mathrm{co}}(\Omega_0)$ は Ω_0 の閉凸包を表す．
- 任意の $t > 0$, $x \in \Omega(t) \setminus \overline{\mathrm{co}}(\Omega_0)$ 及び $\nu \cdot (z - x) < 0$ $({}^\forall z \in \overline{\mathrm{co}}(\Omega_0))$ を満たす任意の $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ に対して $\partial_\nu u(t,x) < 0$ が成り立つ．

自由境界の時間無限大での挙動については以下のことが得られている．

定理 2 (Du-Matano-Wang [6])**.** (F) を仮定する．任意の $0 < t < s$ に対して $\overline{\Omega_0} \subset \Omega(t) \subset \Omega(s)$ が成り立つ．$\Omega_\infty = \cup_{t>0}\Omega(t)$ とすると Ω_∞ は $\mathbb{R}^N$ または有界集合である．

- $\Omega_\infty = \mathbb{R}^N$ のとき，ある $T_* \geq 0$ が存在して $t > T_*$ に対して $\Gamma(t)$ は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな曲面である．また $0 \in \Omega_0$ ならばある連続関数 $M(t)$ が存在して

$$\Gamma(t) \subset \left\{ x : M(t) - \frac{\mathrm{diam}(\Omega_0)}{2}\pi \leq |x| \leq M(t) \right\} \quad (t > T_*) \tag{1}$$

 が成り立つ．

- Ω_∞ が有界集合であるならば $\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega(t))} = 0$ が成り立つ．

注意. 定理 2 にある関数 $M(t)$ は以下で与えられる．

$$M(t) = \max_{x\in\Gamma(t)} |x| = \max_{x\in\overline{\Omega(t)}} |x|$$

以上は f が条件 (F) を満たすときに成り立つ一般的な結果であり，これ以上の詳しい漸近挙動については f により具体的な条件を課す必要がある．f が単安定，双安定の非線形項の場合の漸近挙動の解析は Du-Lou-Zhou [2] によって研究がなされている．本講演では非線形項 f に次の条件を課す：

(F1) $f \in C^2([0,\infty))$ であり，ある $0 < u_1^* < u_2^* < u_3^*$ が存在して $f(0) = f(u_1^*) = f(u_2^*) = f(u_3^*) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(u_1^*) < 0$ $f'(u_3^*) < 0$ を満たす．

(F2) $f(u) > 0$ $(u \in (0,u_1^*) \cup (u_2^*,u_3^*))$, $f(u) < 0$ $(u \in (u_1^*,u_2^*) \cup (u_3^*,\infty))$ および $\displaystyle\int_{u_1^*}^{u_3^*} f(u)\,du > 0$ を満たす．

(F3) $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u-\overline{u}_2}$ は $(\overline{u}_2, u_3^*)$ で非減少である，ここで $\overline{u}_2 \in (u_2^*, u_3^*)$ は $\displaystyle\int_{u_1^*}^{\overline{u}_2} f(u)\,du = 0$ を満たすただ 1 つの数である．

(F4) $\displaystyle\lim_{u\searrow u_2^*} \frac{f(u)}{(u-u_2^*)^\kappa} \in (0,\infty]$ が $N=2$ のときある $\kappa \in (0,\infty)$ に対して成り立つ，$N>2$ のときは $\kappa = \dfrac{N}{N-2}$ に対して成り立つ.

これらの条件のうち，(F1), (F2), $f'(u_2^*) > 0$ を満たすものは **positive bistable 型** とよばれ [9] で導入された．このような f は正の安定平衡点を複数もつ**多安定型**である．(F1), (F2), (F4) を満たす非線形項の例は適当な r, $q > 0$ に対する

$$f(u) = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2}$$

である．この非線形項はアメリカ大陸に生息する spruce budworm とよばれる森林害虫の個体数密度の解析のために Ludwig-Aronson-Weinberger [10] により導入された．(F3) は高次元の問題を考えるときにのちに述べる grand state 解（V_{dec}）の存在と一意性を保証する条件である．本講演での主結果は以下の通りである．

定理 A ([**8**]). f は (F1)–(F4) を満たすとする． $\phi \in \mathscr{I}(\Omega_0)$ を任意にとり，$u_\sigma(t,x)$ を (FBP) の初期条件 $u_0(x) = \sigma\phi(x)$ $(\sigma > 0)$ に対応する解，$\Omega_\sigma(t)$ を (FBP) で定まる領域，$\Omega_\infty^\sigma = \cup_{t>0}\Omega_\sigma(t)$ とする．このとき，２つの数 $0 \le \sigma_1^* < \sigma_2^*$ を満たす２つの数 σ_1^*,σ_2^* が存在して次が成り立つ：

(i) $\sigma \in [0, \sigma_1^*]$ ならば **vanishing** が起こる，つまり Ω_∞^σ は有界で次が成り立つ：

$$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in\Omega_\sigma(t)} u_\sigma(t,x) = 0.$$

(ii) $\sigma \in (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ ならば **small spreading** が起こる，つまり $\Omega_\infty^\sigma = \mathbb{R}^N$ で次が成り立つ：

$$\lim_{t\to\infty} u_\sigma(t,x) = u_1^* \quad (\mathbb{R}^N \text{ 上広義一様})$$

(iii) $\sigma \in (\sigma_2^*, \infty)$ ならば **big spreading** が起こる，つまり $\Omega_\infty^\sigma = \mathbb{R}^N$ で次が成り立つ：

$$\lim_{t\to\infty} u_\sigma(t,x) = u_3^* \quad (\mathbb{R}^N \text{ 上広義一様})$$

(iv) $\sigma = \sigma_2^*$ ならば **transition** が成り立つ，つまり $\Omega_\infty^\sigma = \mathbb{R}^N$ で，ある $x_0 \in \overline{\mathrm{co}}(\Omega_0)$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} u_\sigma(t,x) = V_{\mathrm{dec}}(|x - x_0|) \quad (\mathbb{R}^N \text{ 上広義一様})$$

が成り立つ，ここで $V_{\mathrm{dec}}(r)$ は次を満たす唯一の解である

$$\begin{aligned} &V'' + \frac{N-1}{r}V' + f(V) = 0 \ \text{ in } \ (0,\infty), \\ &V'(0) = 0, \quad V'(r) < 0 \ \text{ for } \ r \in (0,\infty), \quad \lim_{r\to\infty} V(r) = u_1^*. \end{aligned} \tag{2}$$

参考文献

[1] Y. Du, Z. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., **42**(2010), 377–405.

[2] Y. Du, B. Lou and M. Zhou, Spreading and vanishing for nonlinear Stefan problems in high space dimensions, J. Elliptic Parabol. Equ. **2**(2016), 297–321.

[3] Y. Du, Z. Guo, Spreading-vanishing dichotomy in a diffusive logistic model with a free boundary, II, J. Differential Equations, **250**(2011) 4336–4366.

[4] Y. Du, Z. Guo, The Stefan problem for the Fisher-KPP equation, J. Differential Equations, **253**(2012) 996–1035.

[5] Y. Du, H. Matsuzawa, M. Zhou, Spreading speed and profile for nonlinear Stefan problem in high space dimension, J. Math. Pures Appl., **103**(2015), 741–787.

[6] Y. Du, H. Matano, K. Wang, Regularity and asymptotic behavior of nonlinear Stefan problems, Arch. Ration. Mech. Anal., **212**(2014) 957–1010.

[7] Y. Kaneko, H. Matsuzawa, Y. Yamada, A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions I : classification of asymptotic behavior, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 42(2022) 2719–2745

[8] Y. Kaneko, H. Matsuzawa, Y. Yamada, A free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity in high space dimensions III : gereral case, in preparation

[9] Y. Kawai, Y. Yamada, Multiple spreading phenomena for a free boundary problem for a free boundary problem of a reaction with a certain class of bistable nonlinearity, J. Differential Equations, **261**(2016), 538–572.

[10] D. Ludwig, D.G. Aronson and H. F. Weinberger, Spatial patterning of spruce budworm, J. Math. Biol. **8** (1979) 217–258.