

Global well-posedness for Hall-MHD system with quantum effects in a scaling critical framework

中里 亮介 (早稲田大学 理工学術院)*

本講演では, 以下の Hall 効果を伴う量子プラズマ MHD モデルの初期値問題の時間大域適切性と定数平衡状態 $(1, 0, \bar{B})$ 周りでの漸近安定性を, 臨界空間の枠組みで考察する:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{\rho} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\tilde{\rho} u) + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u \otimes u) - \operatorname{div}(2\mu D(u) + \lambda I \operatorname{div} u) + \nabla P(\tilde{\rho}) \\ \quad = \operatorname{div}\left(\frac{\hbar^2}{4} \tilde{\rho} \nabla^2 \log \tilde{\rho}\right) + (\nabla \times \tilde{B}) \times \tilde{B}, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \tilde{B} + \nabla \times \left[\left(\nabla \times \tilde{B} + \frac{\gamma_H}{\tilde{\rho}} (\nabla \times \tilde{B}) \times \tilde{B} \right) \right] = \nabla \times (u \times \tilde{B}), & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \tilde{B} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ (\tilde{\rho}, u, \tilde{B})|_{t=0} = (\tilde{\rho}_0, u_0, \tilde{B}_0), & x \in \mathbb{R}^3. \end{array} \right. \quad (\widetilde{\text{MHD}})$$

ただし $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{B} = \tilde{B}(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ はそれぞれ, プラズマの密度, 流速, 磁場を表す未知函数とする. 物理定数は $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\hbar \geq 0$, $\gamma_H \in \mathbb{R}$ とし, 特に μ, λ は $\lambda + 2\mu > 0$ を満たすと仮定する. また $D(u) := (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$, $I := (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ とし, 圧力 $P = P(\tilde{\rho})$ は平衡状態 $\tilde{\rho} = 1$ 周りで実解析的であり, 簡単のため $P'(1) = 1$ を満たすと仮定する. モデルの導出に関しては, Haas [1] の §6 内にて, 論文 [3] で導入した Hall 効果を考慮した修正 Ohm 則を適用することで導出可能である. $\hbar = 0$ の場合は, 問題 $(\widetilde{\text{MHD}})$ は Hall-MHD 方程式の初期値問題と一致する. 論文 [2] では, 定数磁場 $\bar{B} \in \mathbb{R}^3$ 周りでの Hall-MHD 方程式の時間大域適切性と漸近安定性を $L^2(\mathbb{R}^3)$ を基調とした臨界 Besov 空間上で証明した. ここでは $\hbar \neq 0$ の場合を考察し, Korteweg 型応力テンソルに類似した量子衝突項 $\operatorname{div}(\tilde{\rho} \nabla^2 \log \tilde{\rho})$ の恩恵で圧縮性特有の連続の式 $\partial_t \tilde{\rho} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u) = 0$ からくる双曲性が緩和され, 論文 [2] では得られていない L^p ($p \neq 2$) に対応する臨界空間の枠組みで時間大域解が構成できることを述べる. 以下 $\hbar > 0$ と仮定し, $\rho = \tilde{\rho} - 1$, $B := \tilde{B} - \bar{B}$ として, 問題 $(\widetilde{\text{MHD}})$ を以下のように書き換える:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \operatorname{div} u = -\operatorname{div}(\rho u), \\ \partial_t u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \nabla \rho - \frac{\hbar^2}{4} \nabla \Delta \rho - (\nabla \times B) \times \bar{B} = f_{NL}, \\ \partial_t B - \Delta B + \gamma_H \nabla \times \left((\nabla \times B) \times \bar{B} \right) - \nabla \times (u \times \bar{B}) = \nabla \times g_{NL}, \\ (\rho, u, B)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, B_0). \end{array} \right. \quad (\text{MHD})$$

問題 (MHD) 内の f_{NL}, g_{NL} は非線形項であり, ここでは正確な式は割愛するが $f_{NL} := -(u \cdot \nabla)u - \frac{\rho}{\rho+1} \mu \Delta u + \frac{\rho}{\rho+1} \frac{\hbar^2}{4} \nabla \Delta \rho + \text{剰余項}$, $g_{NL} := u \times B - \frac{\rho}{\rho+1} \gamma_H (\nabla \times B) \times B + \text{剰余項}$ と表される.

【記号と函数空間の導入】 $n \geq 1, s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ とする. $\mathcal{F}[f]$ は函数 f の Fourier 変換とし, $\widehat{f}$ と表記する. $\mathcal{F}^{-1}[f]$ は Fourier 逆変換とする. Fourier-Lebesgue ノルム $\|\cdot\|_{\widehat{L}^p}$ を $\|f\|_{\widehat{L}^p} := \|\mathcal{F}[f]\|_{L^{p'}}$ と定義し, p' は Hölder 共役指数を表す. 函数族 $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$0 \leq \widehat{\phi}_j(\xi) \leq 1, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}_j(\xi) = 1 \quad (\xi \neq 0), \quad \operatorname{supp} \widehat{\phi}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$$

*〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3 丁目 4-1 早稲田大学 理工学術院総合研究所 重点研究領域「数理科学研究所」次席研究員 (研究院講師), e-mail: r-nakasato@aoni.waseda.ac.jp

を満たす Littlewood-Paley の 2 進単位周波数分解とする. また本講演で扱う Fourier-Besov 空間 $\widehat{B}_{p,1}^s = \widehat{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ とそのノルム $\|\cdot\|_{\widehat{B}_{p,1}^s}$ を以下で定義する:

$$\widehat{B}_{p,1}^s := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \widehat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n), \|f\|_{\widehat{B}_{p,1}^s} < \infty\}, \quad \|f\|_{\widehat{B}_{p,1}^s} := \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sj} \|\phi_j * f\|_{\widehat{L}^p}.$$

初期値問題 (MHD) に対して, $\widehat{L}^p$ -臨界空間上での時間大域適切性と定数平衡状態周りでの漸近安定性に関する次の結果を得た ([4]):

定理 1. $1 \leq p < 6$ とする. 初期函数 (ρ_0, u_0, B_0) はある十分小さい定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\mathcal{X}_{p,0} := \|(\rho_0, B_0)\|_{\widehat{B}_{p,1}^{-1+\frac{3}{p}} \cap \widehat{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}}} + \|u_0\|_{\widehat{B}_{p,1}^{-1+\frac{3}{p}}} \leq \varepsilon_0 \quad (1.1)$$

かつ $\operatorname{div} B_0 = 0$ を満たすと仮定する. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $t > 0$ に対し, 次の時間一様評価を満たす初期値問題 (MHD) の時間大域解 (ρ, u, B) が一意的に存在する:

$$\|(\rho, u, B)\|_{L^\infty(0,t;\widehat{B}_{p,1}^{-1+\frac{3}{p}}) \cap L^1(0,t;\widehat{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}})} + \|(\rho, B)\|_{L^\infty(0,t;\widehat{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}}) \cap L^1(0,t;\widehat{B}_{p,1}^{2+\frac{3}{p}})} \leq C \mathcal{X}_{p,0}.$$

定理 2. $1 \leq p < 6$, 初期函数 (ρ_0, u_0, B_0) は定理 1 と同様に (1.1) と $\operatorname{div} B_0 = 0$ を満たすと仮定する.

(1) (L^p - $L^{p/2}$ 減衰評価) $2 \leq p < 6$ とし, 十分小さい定数 $\varepsilon_0 > 0$ と $j_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\mathcal{D}_{p,0} := \sup_{j \leq j_0} 2^{-\frac{3}{p}j} \|\phi_j * (\rho_0, u_0, B_0)\|_{\widehat{L}^p} \leq \varepsilon_0$$

を満たすと仮定する. このとき, 初期値問題 (MHD) の時間大域解 (ρ, u, B) は, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $t \geq 1$ に対して, 以下の時間減衰評価を満たす:

$$\| |\nabla|^s (\rho, u, B)(t) \|_{\widehat{B}_{p,1}^0} \leq C(\mathcal{X}_{p,0} + \mathcal{D}_{p,0}) t^{-(\frac{3}{2p} + \frac{s}{2})}, \quad -\frac{3}{p} < s \leq 1 + \frac{3}{p}. \quad (1.2)$$

ただし $|\nabla|^s := \mathcal{F}^{-1} |\xi|^s \mathcal{F}$ とする. 特に (1.2) より, $p \leq r \leq \infty$ を満たす任意の r に対して, Lebesgue ノルムに対する減衰評価 $\|(\rho, u, B)(t)\|_{L^r} = O(t^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p} - \frac{1}{r})})$ ($t \rightarrow \infty$) が得られる.

(2) (L^p - L^1 減衰評価) $1 \leq p \leq 2$ の場合に, もし十分小さい定数 $\varepsilon_0 > 0$ と $j_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{p,0} := \sup_{j \leq j_0} 2^{-\frac{3}{p'}j} \|\phi_j * (\rho_0, u_0, B_0)\|_{\widehat{L}^p} \leq \varepsilon_0$$

を満たすと仮定する. このとき, 初期値問題 (MHD) の時間大域解 (ρ, u, B) は, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $t \geq 1$ に対して, 以下の時間減衰評価を満たす:

$$\| |\nabla|^s (\rho, u, B)(t) \|_{\widehat{B}_{p,1}^0} \leq C(\mathcal{X}_{p,0} + \widetilde{\mathcal{D}}_{p,0}) t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{s}{2}}, \quad -\frac{3}{p'} < s \leq 1 + \frac{3}{p}. \quad (1.3)$$

特に (1.3) より, $p \leq r \leq \infty$ を満たす任意の r に対して, Fourier-Lebesgue ノルムに対する減衰評価 $\|(\rho, u, B)(t)\|_{\widehat{L}^r} = O(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{r})})$ ($t \rightarrow \infty$) が得られる.

REFERENCES

- [1] Haas, F., *Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach*, vol. 65, Springer, NewYork, 2011, pp. xiv+206.
- [2] Kawashima, S., Nakasato, R., Ogawa, T., *Global well-posedness and time-decay of solutions for the compressible Hall-magnetohydrodynamic system in the critical Besov framework*, J. Differential Equations, **328** (2022) 1-64.
- [3] Kawashima, S., Nakasato, R., Ogawa, T., *Mathematical modelling and dissipative structure for systems of magnetohydrodynamics with Hall effect*, Math. Models Methods Appl. Sci., **32** (2022), online ready.
- [4] Nakasato, R., *Global well-posedness for the Hall-magnetohydrodynamic system with quantum effects in a critical L^p framework*, preprint.