空間変数に依存する摩擦項をもつ波動方程式の解の高次漸近展開

若杉勇太（広島大学）

Ω を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ の外部領域または $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ とし，次の消散型波動方程式の初期境界値問題を考える（$\Omega = \mathbb{R}^N$ のときは境界条件は考えない）．

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)\partial_t u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$u = u(x,t)$ は実数値の未知関数，u_0, u_1 は与えられた初期値である．摩擦項の係数 $a(x)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の滑らかかつすべての導関数が有界な正値関数で，ある定数 $\alpha \in [0,1)$ および $a_0 > 0$ が存在して

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\alpha} a(x) = a_0 \tag{2}$$

をみたすとする．

初期境界値問題 (1) に対して，仮定 (2) および初期値に対する適当な条件のもとで，解 u が $t \to \infty$ のとき対応する拡散方程式

$$\begin{cases} a(x)\partial_t V_0 - \Delta V_0 = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ V_0(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ V_0(x,0) = u_0(x) + a(x)^{-1}u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

の解 V_0 に漸近することが知られている（[3, 4]）．本講演では，さらに解の高次漸近展開を求めることを目的とする．

本講演の主結果を述べる．$x \in \mathbb{R}^N$ に対し，$\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$ と表す．また，非負整数 k および実数 m に対し，重み付き Sobolev 空間 $H^{k,m}(\Omega)$ を

$$H^{k,m}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \langle x \rangle^m \partial_x^\alpha f \in L^2(\Omega)\,\text{for any}\,\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N\,\text{with}\,|\alpha| \leq k\},$$
$$\|f\|_{H^{k,m}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\langle x \rangle^m \partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}$$

で定義する．また，$C_0^\infty(\Omega)$ の $H^{k,m}(\Omega)$ における閉包を $H_0^{k,m}(\Omega)$ で表す．

定理 1 ([6])**.** n を非負整数とする．$a(x)$ は (2) をみたすとする．このとき，$n+1 < \frac{N-\alpha}{2\alpha}$ かつ $\lambda \in (\frac{2\alpha}{2-\alpha}(n+1), \frac{N-\alpha}{2-\alpha})$ ならば，ある正整数 $s = s(n)$ および定数 $m = m(n,\alpha,\lambda) > 0$ が存在し，以下が成立する：初期値 u_0, u_1 が

$$u_0 \in H^{s+1,m}(\Omega) \cap H_0^{s,m}(\Omega), \quad u_1 \in H_0^{s,m}(\Omega)$$

本講演は側島基宏氏（東京理科大学）との共同研究にもとづく．

をみたすならば，ある関数 $\widetilde{V}_1 \dots, \widetilde{V}_n \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ および正定数 C が存在し，初期境界値問題 (1) の解 u は任意の $t>0$ に対して

$$\left\| u(t) - V_0(t) - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{V}_j(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \le C(1+t)^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{(2n+1)(1-\alpha)}{2-\alpha} + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}}$$

をみたす．ここで，V_0 は (3) の解であり，$\widetilde{V}_j$ $(j=1,\dots,n)$ は逐次的に

$$\begin{cases} a(x)\partial_t V_j - \Delta V_j = -\partial_t V_{j-1}, & x \in \Omega, t>0, \\ V_j(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t>0, \\ V_j(x,0) = -(-a(x))^{-j-1} u_1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

の解を用いて $\widetilde{V}_j = \partial_t^j V_j$ で与えられる．

注意 2. (i) 定理の中にある仮定 $n+1 < \frac{N-\alpha}{2\alpha}$ は，$\alpha = 0$ の場合は必要ない．この条件は，α が大きい（摩擦が弱い）とそれに応じて漸近展開の次数 n を小さくとる必要があることを意味する．しかし，この条件が本当に必要なのかどうかは分かっていない．

(ii) 漸近展開に現れる関数 V_0 および $\widetilde{V}_j$ $(j=1,\dots,n)$ はそれぞれ

$$\|V_0(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C(1+t)^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}},$$
$$\|\widetilde{V}_j(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C(1+t)^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{2j(1-\alpha)}{2-\alpha} + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}}$$

をみたす．

(iii) $\Omega = \mathbb{R}^N$ かつ $a(x) \equiv 1$ の場合には，Takeda [7]，Michihisa [1] により解の高次漸近展開が得られている．また，Sobajima [2] により，Hilbert 空間上の定数係数の抽象的消散型波動方程式に対して解の高次漸近展開が与えられている．

証明の鍵となるのは，一般の非斉次項付きの消散型波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w + a(x)\partial_t w = F, & x \in \Omega, t>0, \\ w(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t>0, \\ w(x,0) = w_0(x),\ \partial_t w(x,0) = w_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4}$$

の解 w を分解する次の補題である．

補題 3. w を消散型波動方程式 (4) の解とする．V, U をそれぞれ

$$\begin{cases} a(x)\partial_t V - \Delta V = F, & x \in \Omega, t>0, \\ V(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t>0, \\ V(x,0) = w_0(x) + a(x)^{-1} w_1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \Delta U + a(x)\partial_t U = -\partial_t V, & x \in \Omega, t>0, \\ U(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t>0, \\ U(x,0) = 0,\ \partial_t U(x,0) = -a(x)^{-1} w_1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

の解とする．このとき，$w = V + \partial_t U$ が成立する．

注意 4. $a(x) \equiv 1$ の場合の補題は Sobajima [2] による．

上の分解において，$\partial_t U$ は時間微分の効果により w, V よりも $t \to \infty$ のときの減衰が速くなっている．この意味で V が w の漸近形であり，$\partial_t U$ が剰余項と考えることができる．この補題を繰り返し適用することにより，定理の漸近展開の各項 $\widetilde{V}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ が順に決定され，(1) の解 u が

$$u = V_0 + \widetilde{V}_1 + \cdots + \widetilde{V}_n + \partial_t^{n+1} U_{n+1}$$

の形に分解されることがわかる．ただし，ここで剰余項 U_{n+1} は，非斉次項付きの消散型波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 U_{n+1} - \Delta U_{n+1} + a(x)\partial_t U_{n+1} = -\partial_t V_n, & x \in \Omega, t > 0, \\ U_{n+1}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ U_{n+1}(x,0) = 0,\ \partial_t U_{n+1}(x,0) = (-a(x))^{-n-1} u_1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

の解で与えられる．したがって後は

$$\|\partial_t^{n+1} U_{n+1}(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C(1+t)^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{(2n+1)(1-\alpha)}{2-\alpha} + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}}$$

を示せば定理の結論が得られるが，これには [5] による多項式オーダーをもつ重み関数を用いたエネルギー法を利用する．

参考文献

[1] H. Michihisa, *L^2-asymptotic profiles of solutions to linear damped wave equations*, J. Differential Equations **296** (2021), 573–592.

[2] M. Sobajima, *Higher order asymptotic expansion of solutions to abstract linear hyperbolic equations*, Math. Ann. **380** (2021), 1–19.

[3] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping in an exterior domain*, J. Differential Equations **261** (2016), 5690–5718.

[4] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Remarks on an elliptic problem arising in weighted energy estimates for wave equations with space-dependent damping term in an exterior domain*, AIMS Mathematics **2** (2017), 1–15.

[5] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Supersolutions for parabolic equations with unbounded or degenerate diffusion and its applications to some classes of parabolic and hyperbolic equations*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), 1091–1128.

[6] M. Sobajima, Y. Wakasugi, Asymptotic expansion of solutions to the wave equation with space-dependent damping, arXiv:2203.06360v1.

[7] H. Takeda, *Higher-order expansion of solutions for a damped wave equation*, Asymptotic Analysis **94** (2015), pp. 1–31.