

A localized maximum principle and its application to the critical SQG on bounded domain

岩瀬 司 (東北大学大学院 理学研究科)

本講演では境界が滑らかな有界領域上の表面準地衡方程式の初期値問題を取り扱うための手法について最近得られた結果を報告する. 基本となるのは領域がユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の場合で, Wang-Zhang (2011) [2] による結果が知られている. そこでは Fourier 変換と周波数の 2 進数分解を基本にした手法により小さい初期値に対する時間大域解の存在が証明されている. 本講演では, 有界領域上でスペクトルの 2 進分解を考えることでこうした結果を証明可能であることを報告する ([1]). 技術的には, スペクトルを 2 進数で制限した場合の一種の最大値原理, 交換子評価がポイントとなるためそれらに焦点を絞って講演する.

Ω を $\mathbb{R}^2$ の境界が滑らかな有界領域とし, A を以下で定義される Dirichlet 境界条件を課した Laplacian とする.

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta f \in L^2(\Omega)\}, \\ Af = -\Delta f = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)f, \quad f \in D(A). \end{cases}$$

このとき作用素 A は $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素であるためスペクトル分解定理を適用できる. 従って, ある単位の分解が存在して A を掛け算作用素として理解することができる. さらに, 分数べきラプラシアン $A^{\alpha/2}$ ($\alpha > 0$) やより一般に関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して $\varphi(A)$ を導入することができる. 本講演では分数べきラプラシアンを表す記号として

$$\Lambda = A^{1/2}$$

を用い, $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ を次を満たすような半直線 $(0, \infty)$ における単位の分解とする.

$$\text{supp } \phi_0 \subset \left[\frac{1}{2}, 2\right], \quad 0 \leq \phi_0 \leq 1, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_0(2^{-j}\lambda) = 1 \text{ for } \lambda > 0,$$

$$\phi_j(\lambda) = \phi_0(2^{-j}\lambda), \quad \lambda > 0.$$

以下の単位の分解は基本的である.

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j(\Lambda) f, \quad f \in L^2(\Omega).$$

さらに, 以下の事実を基にして $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 上でも $\phi_j(\Lambda)$ を考えることができる.

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\phi_j(\Lambda)\|_{L^p \rightarrow L^p} < \infty.$$

主結果の 1 つ目として以下の定理を述べる.

定理 1. ([1]) $u = u(t, x), f = f(t, x)$ は $[0, \infty) \times \Omega$ において有界かつ滑らかであると し, $\partial_t u + \Lambda u = f$ が成り立つとする. このとき, u, f に依存しない定数 $c > 0$ が存在して, 全ての $j \in \mathbb{Z}$, ほとんど全ての $t > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\partial_t \|\phi_j(\Lambda)u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + c2^j \|\phi_j(\Lambda)u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi_j(\Lambda)f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

定理 1 の応用例として次の方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t \theta + (u \cdot \nabla) \theta + \Lambda \theta = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u = \nabla^\perp \Lambda^{-1} \theta, & t > 0, x \in \Omega, \\ \theta(0, x) = \theta_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

ただし, $\theta = \theta(t, x)$ は未知関数とし, $\nabla^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ である. この初期値問題に対して, 論文 [1] で得られた結果は Besov 空間 $\dot{B}_{\infty,1}^0$ における小さい初期値に対する時間大域解の一意的存在定理である. ここで Besov 空間について, ノルムの定義を述べておく.

定義 (Besov 空間). $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ とする. $\dot{B}_{p,q}^s(A)$ のノルムを以下で定義する.

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(A)} := \left\| \left\{ 2^{sj} \|\phi_j * f\|_{L^p} \right\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell(\mathbb{Z})} < \infty.$$

この初期値問題について, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ における方法 ([2]) を領域上の場合に発展させられるという点が今回の新しい点である. 証明では, スペクトル分解によりスペクトルを 2 進数に分解し, 解の近似列を導入して空間 $L^\infty(0, \infty; \dot{B}_{\infty,1}^0) \cap L^1(0, \infty; \dot{B}_{\infty,1}^1)$ における一様有界性を示すという手順である. そこではスペクトルを 2 進数に制限する作用素 $\phi_j(\Lambda)$ と $u \cdot \nabla$ の交換子に対する取り扱いが必要である. 発表者が確認した限りでは, Littlewood-Paley の 2 進分解 ϕ_j をもちいて交換子評価を証明することは困難であったため, 1 の分解の方法をレゾルベントを用いて導入することを考えた. すなわち,

$$\psi_j(\lambda) = (1 + 2^{-2j-2}\lambda^2)^{-1} - (1 + 2^{-2j}\lambda^2)^{-1}, \quad \lambda > 0, j \in \mathbb{Z},$$

を考える. ここで $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\lambda) = 1, \quad \lambda > 0,$$

を満たし, $|s| < 2$ のとき単位の分解 $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ で定義される Besov 空間の 2 つのノルムに対して同値性を証明することができる.

以下の交換子評価を定理 2 として述べる.

定理 2. ([1]) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $f \in \dot{B}_{\infty,1}^1(A)$, $g \in \dot{B}_{\infty,1}^0(A)$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\| (\nabla^\perp \Lambda^{-1} f \cdot \nabla) \psi_j(\Lambda) g - \psi_j(\Lambda) \left((\nabla^\perp \Lambda^{-1} f \cdot \nabla) g \right) \right\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty,1}^1} \|g\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}.$$

REFERENCES

- [1] T. Iwabuchi, *An application of spectral localization to the critical SQG on a ball*, J. Evol. Equ. **22** (2022), no. 4, Paper No. 80, 25.
- [2] H. Wang and Z. Zhang, *A frequency localized maximum principle applied to the 2D quasi-geostrophic equation*, Comm. Math. Phys. **301** (2011), no. 1, 105–129.