

Effect of decay rates of initial data on the sign of solutions to Cauchy problems of some higher order parabolic equations

三宅 庸仁 (東京大学・大学院数理科学研究科・学振PD)

本講演では主に、以下の高階放物型方程式に対する初期値問題の解の符号を考察する：

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^m u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (\text{P1})$$

ただし、 $N \geq 1$, m は 2 以上の自然数とする。

二階放物型方程式の場合と異なり、高階放物型方程式では「初期値が非負値関数であるならば、対応する解もまた非負値関数となる」という正值性保存則が一般に成立しないことが知られている。実際、例えば Gazzola–Grunau [4], Ferreira–Ferreira [2] において、作用素 $\partial_t + (-\Delta)^m$ に対する基本解 G_m の性質を用いて以下が示されている：非負値関数 $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ に対して、問題 (P1) の解となる合成積

$$[S_m(t)u_0](x) := \int_{\mathbb{R}^N} G_m(x-y, t)u_0(y) dy$$

について、以下をみたす時刻 $T > 0$ が存在する：

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} [S_m(t)u_0](x) < 0 \quad \text{for all } t \geq T. \quad (1)$$

すなわち、空間遠方で零となる初期値に対する解は必ず符号変化することが上記の論文にて示されている。一方、 $u_0 \equiv 1$ とした際には $[S_m(t)u_0](x) \equiv 1$ となるため、特に時空間大域的に正值な解となる。これらの事実から、初期値が空間遠方で減衰が遅い場合には解に対する大域的な正值性が期待できる。実際、Ferrero–Gazzola–Grunau [3] において $N = 1$, $m = 2$ かつ $0 < \beta \ll 1$ の場合には $[S_m(t)] \cdot |\cdot|^{-\beta}(x)$ は時空間大域的に正值な関数となることが示されている。また同論文では、空間遠方において多項式減衰するような初期値に対する空間局所的かつ時間終局的な解の正值性が証明されている。しかし、同様の初期値に対して空間大域的かつ時間終局的な解の正值性については講演者の知る限り知られていない。

以上の先行研究に基づき、講演者は初期値の減衰速度に対して適当な条件を加えることにより、問題 (P1) の解の符号を決定することができるのではないかと考え、解析を行なった。以下は、Miyake [6] において得られた結果である。

定理 1. $N \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ は 2 以上の自然数, $\beta \in (0, N)$ とする. また, $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$ を以下をみたす関数とする:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\beta u_0(x) = c_* > 0 \quad \text{for some } c_* > 0. \quad (2)$$

このとき, 以下をみたす定数 $\beta_* \in (0, N)$ が存在する:

(a) $\beta \in (0, \beta_*)$ のとき, ある時刻 $T > 0$ が存在し以下が成り立つ:

$$[S_m(t)u_0](x) > 0 \quad \text{for all } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [T, \infty). \quad (3)$$

(b) $\beta \in (\beta_*, N)$ のとき, (1) をみたす $T > 0$ が存在する.

定理 1 は, 問題 (P1) の解が正值関数となるか否か分かれるような閾値 $\beta_* \in (0, N)$ が存在することを意味している. この閾値 β_* は, 以下の定理により特徴づけられる定数である.

定理 2. $N \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ は 2 以上の自然数とする. このとき, 以下をみたす $\beta_* \in (0, N)$ が存在する:

(a) $\beta \in (0, \beta_*)$ のとき, $[S_m(t)| \cdot |^{-\beta}](x)$ は時空間大域的に正值な関数となる.

(b) $\beta = \beta_*$ のとき, $[S_m(t)| \cdot |^{-\beta}](x)$ は非負値関数であり, 任意の時刻で零点をもつ.

(c) $\beta \in (\beta_*, N)$ のとき, $[S_m(t)| \cdot |^{-\beta}](x)$ は任意の時刻で負となる点をもつ.

定理 2 は, Grunau–Miyake–Okabe [5] の拡張として Miyake [6] において得られた結果である. また, これらの結果を応用することで以下の半線形高階放物型方程式に対して定理 1-(a) と同様の性質を持つ時間大域解が構成できる:

$$\begin{cases} \partial_t v + (-\Delta)^m v = |v|^{p-1} v & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ v(\cdot, 0) = \varepsilon v_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (\text{P2})$$

ただし, $p > 1$ とする. ここで, $v: \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が問題 (P2) の時間大域解であるとは, $v \in C_b((0, \infty); C_b(\mathbb{R}^N))$ かつ

$$v(x, t) = \varepsilon [S_m(t)v_0](x) + \int_0^t [S_m(t-s)|v(\cdot, s)|^{p-1}v(\cdot, s)](x) ds \quad \text{for } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$$

が成り立つことと定める.

定理 3. $N \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ は 2 以上の自然数, $p > 1 + 2m/\beta_*$ とする. また, $\beta \in [2m/(p-1), \beta_*)$ とし, $v_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$ を (2) をみたす関数とする. このとき, $0 < \varepsilon \ll 1$ に対し (3) をみたす $T > 0$ が存在する時間大域解 v が存在する.

注意 1. 空間大域的かつ時間終局的に正值となる問題 (P2) の時間大域解は, $1 < p \leq 1 + 2m/N$ の場合は存在しないことが Egorov–Galaktionov–Kondratiev–Pohožaev [1] で示されている.

参考文献

- [1] Egorov, Yu.E., Galaktionov, V.A., Kondratiev, V.A., and Pohožaev, P.I., *On the necessary conditions of global existence to a quasilinear inequality in the half-space*, C. R. Acad. Sci. Paris **330** (2000), 93–98.
- [2] Ferreira, L.C.F. and Ferreira, V.A. Jr., *On the eventual local positivity for polyharmonic heat equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 10, 4329–4341.
- [3] Ferrero, A., Gazzola, F., and Grunau, H.-Ch., *Decay and eventual local positivity for biharmonic parabolic equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 4, 1129–1157.
- [4] Gazzola, F. and Grunau, H.-Ch., *Eventual local positivity for a biharmonic heat equation in $\mathbb{R}^n$* , Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **1** (2008), no. 1, 83–87.
- [5] Grunau, H.-Ch., Miyake, N., and Okabe, S., *Positivity of solutions to the Cauchy problem for linear and semilinear biharmonic heat equations*, Adv. Nonlinear Anal. **10** (2021), no. 1, 353–370.
- [6] Miyake, N., *Effect of decay rates of initial data on the sign of solutions to Cauchy problems of polyharmonic heat equations*, Math. Ann. (2022), to appear, <https://doi.org/10.1007/s00208-022-02466-w> (online first).