Global well-posedness for a Q-tensor model of nematic liquid crystals

村田　美帆　(静岡大/東北大)*

1. 導入

本講演では, Beris-Edwards (1994) によって定式化されたネマティック液晶の流れを表すモデルを全空間 $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ で考察する. このモデルは, 以下に述べるように, Navier-Stokes 方程式と, 液晶分子の配向を表す対称かつトレースレス テンソル $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(x,t)$ に対する放物型方程式の連立系で表される.

$$
\begin{cases}
\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \mathfrak{p} = \Delta \mathbf{u} + \mathrm{Div}\,(\tau(\mathbb{Q}) + \sigma(\mathbb{Q})), \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \\
\partial_t \mathbb{Q} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbb{Q} - \mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}, \mathbb{Q}) = \mathbb{H}, \\
(\mathbf{u}, \mathbb{Q})|_{t=0} = (\mathbf{u}_0, \mathbb{Q}_0).
\end{cases} \tag{BE}
$$

ここで, $\mathbf{u} = (u_1(x,t), \ldots, u_N(x,t))^T$ は流速, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x,t)$ は圧力を表す. また, 行列値関数 $\mathbb{A} = (A_{ij})$ に対して, $\mathrm{Div}\,\mathbb{A} = \left(\sum_{j=1}^N \partial_j A_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^N \partial_j A_{Nj}\right)^T$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ とし, $\tau(\mathbb{Q})$, $\sigma(\mathbb{Q})$, $\mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}, \mathbb{Q})$ は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
\tau(\mathbb{Q}) &= 2\eta \mathbb{H} : \mathbb{Q}\left(\mathbb{Q} + \frac{1}{N}\mathbb{I}\right) - \eta\left[\mathbb{H}\left(\mathbb{Q} + \frac{1}{N}\mathbb{I}\right) + \left(\mathbb{Q} + \frac{1}{N}\mathbb{I}\right)\mathbb{H}\right] - \nabla \mathbb{Q} \odot \nabla \mathbb{Q}, \\
\sigma(\mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}\mathbb{H} - \mathbb{H}\mathbb{Q}, \\
\mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}, \mathbb{Q}) &= (\eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{W}(\mathbf{u}))\left(\mathbb{Q} + \frac{1}{N}\mathbb{I}\right) + \left(\mathbb{Q} + \frac{1}{N}\mathbb{I}\right)(\eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) - \mathbf{W}(\mathbf{u})) \\
&\quad - 2\eta\left(\mathbb{Q} + \frac{1}{N}\mathbb{I}\right)\mathbb{Q} : \nabla \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

ただし, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2$, $\mathbf{W}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T)/2$, $\mathbb{I}$ は $N \times N$ の単位行列, $\nabla \mathbb{Q} \odot \nabla \mathbb{Q}$ の (i,j) 成分は $\sum_{\alpha,\beta=1}^N \partial_i Q_{\alpha\beta} \partial_j Q_{\alpha\beta}$ とする. パラメータ $\eta \in \mathbb{R}$ は, せん断流が液晶分子の配向方向を回転させる効果と静止させる効果の比率を表す. $\mathbb{H}$ は自由エネルギーの汎関数微分で定義され, $\mathbb{Q}$ の対称性と $\mathrm{tr}\mathbb{Q} = 0$ より次で与えられる.

$$
\mathbb{H} = L\Delta \mathbb{Q} - a\mathbb{Q} + b(\mathbb{Q}^2 - \mathrm{tr}(\mathbb{Q}^2)\mathbb{I}/N) - c\,\mathrm{tr}(\mathbb{Q}^2)\mathbb{Q}.
$$

ここで, L, a, b, c は定数で, $L = 1$, $a, c > 0$ とする.

(BE) の可解性について, 以下の結果が知られている. 弱解の存在については, Paicu-Zarnescu (2011, 2012), Huang-Ding (2015), Ann (2017) などがある. 一方, 強解については, Abels-Dolzmann-Liu [1] が有界領域において L_2 枠で時間局所解の一意存在性を示した. Liu-Wang [2] は, [1] で得られた解の空間に対する正則性より高い正則性をもつ時間局所解を得た. Xiao [6] は有界領域で時間 L_p, 空間 L_q の最大正則性が成り立つクラスで時間大域解の一意存在性を示しているが, $\eta = 0$ を仮定した簡易的なモデルを扱っている. 最近では Schonbek-Shibata [3] が全空間において L_p-L_q 枠で時間大域解の

本研究は柴田良弘教授（早稲田大学）との共同研究に基づく.

* e-mail: murata.miho@shizuoka.ac.jp

一意存在性と解の減衰評価を得ているが, $\tau(\mathbb{Q})$ の線形項から $\Delta\mathbb{Q} - a\mathbb{Q}$ を除いたモデルを扱っており, (BE) を考察していない. そこで本研究では, η に条件を課さず, 十分小さな初期値に対し (BE) の時間大域解の一意存在性を L_p-L_q 枠で考察する.

2. 主結果

主定理を述べるために次のノルムと関数空間を導入する.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_0 &= \{\mathbb{Q} : N \times N \text{ 行列} \mid \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^T,\ \mathrm{tr}\mathbb{Q} = 0\},\\
X(\mathbb{R}^N; \mathbb{S}_0) &= \{\mathbb{Q} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{S}_0 \mid \|\mathbb{Q}\|_X = \textstyle\sum_{i,j=1}^N \|Q_{ij}\|_X < \infty\}\ \ (X : \mathrm{Banach}\text{ 空間}),\\
J_q(\mathbb{R}^N) &= \{\mathbf{u} \in L_q(\mathbb{R}^N) \mid \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N\},\\
D_{q,p}(\mathbb{R}^N) &= \{(\mathbf{u}, \mathbb{Q}) \mid \mathbf{u} \in (B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^N) \cap J_q(\mathbb{R}^N)),\ \ \mathbb{Q} \in B^{1+2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{S}_0)\},\\
X_{p,q,t} &= \{(\mathbf{u}, \mathbb{Q}) \mid \mathbf{u} \in L_p((0,t), W^2_q(\mathbb{R}^N)) \cap W^1_p((0,t), L_q(\mathbb{R}^N)),\\
&\qquad \mathbb{Q} \in L_p((0,t), W^3_q(\mathbb{R}^N; \mathbb{S}_0)) \cap W^1_p((0,t), W^1_q(\mathbb{R}^N; \mathbb{S}_0))\},\\
\|(\mathbf{f}, \mathbb{G})\|_{W^{m,\ell}_q(\mathbb{R}^N)} &= \|\mathbf{f}\|_{W^m_q(\mathbb{R}^N)} + \|\mathbb{G}\|_{W^\ell_q(\mathbb{R}^N)},\\
\mathcal{N}(\mathbf{u}, \mathbb{Q})(T) &= \sum_{q=q_1,q_2} \Big(\| <t>^b (\mathbf{u}, \mathbb{Q})\|_{L_\infty((0,T), W^{0,1}_q(\mathbb{R}^N))} + \| <t>^b \partial_t(\mathbf{u}, \mathbb{Q})\|_{L_p((0,T), W^{0,1}_q(\mathbb{R}^N))}\Big)\\
&\quad + \| <t>^b \nabla(\mathbf{u}, \mathbb{Q})\|_{L_p((0,T), W^{1,2}_{q_1}(\mathbb{R}^N))} + \| <t>^b (\mathbf{u}, \mathbb{Q})\|_{L_p((0,T), W^{2,3}_{q_2}(\mathbb{R}^N))}.
\end{aligned}
$$

ただし $<t> = (1+t^2)^{1/2}$ とし, b はあとで定める正定数とする. 以下が主定理である.

定理 1. $0 < \sigma < 1/2$, $p = 2$ または $p = 2 + \sigma$ とし, q_1, q_2 は次を満たすとする.

$$
q_1 = 2 + \sigma, \quad \begin{cases} q_2 \geq \dfrac{N(2+\sigma)}{N - (2+\sigma)} & \text{if } N = 3, 4, \\ q_2 > N & \text{if } N \geq 5. \end{cases}
$$

また $p = 2$ のときは $b = (N-\sigma)/(2(2+\sigma))$, $p = 2 + \sigma$ のときは $b = N/(2(2+\sigma))$ とする. このときある定数 $\epsilon > 0$ が存在して,

$$
\sum_{i=1}^2 \|(\mathbf{u}_0, \mathbb{Q}_0)\|_{D_{q_i,p}(\mathbb{R}^N)} + \|(\mathbf{u}_0, \mathbb{Q}_0)\|_{W^{0,1}_{q_1/2}(\mathbb{R}^N)} < \epsilon^2
$$

を満たす初期値 $(\mathbf{u}_0, \mathbb{Q}_0) \in \bigcap_{i=1}^2 D_{q_i,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{0,1}_{q_1/2}(\mathbb{R}^N)$ に対して, (BE) は一意解 $(\mathbf{u}, \mathbb{Q}) \in X_{p,q_1,\infty} \cap X_{p,q_2,\infty}$ をもつ. さらに次の評価を満たす.

$$
\mathcal{N}(\mathbf{u}, \mathbb{Q})(\infty) \leq \epsilon.
$$

3. $\mathcal{R}$ 有界性

本研究では, Shibata [4] により導入された, 非有界領域における準線形放物型方程式, または準線形の双曲・放物型連立方程式に対する時間大域的適切性の導出法を用いる. この手法を用いるために鍵となるのは (1) 線形化問題から定まる線形作用素が C_0 解析半群を生成すること, (2) 線形化問題の解に対する L_p-L_q 最大正則性評価, (3) 半群の L_p-L_q 減衰評価の 3 つである. 特に (1), (2) を得るためにレゾルベント問題に対する解作用素の $\mathcal{R}$ 有界性を用いる. まずは作用素族の $\mathcal{R}$ 有界性の定義を導入する.

定義 2. X と Y を Banach 空間とする. 作用素族 $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ が $\mathcal{R}$ 有界であるとは, 正定数 $C>0$ と $p \in [1,\infty)$ があって, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\{T_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{T}$, $\{f_j\}_{j=1}^n \subset X$ に対して

$$\Big\{\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)T_jf_j\|_Y^p\,du\Big\}^{\frac{1}{p}} \le C\Big\{\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(u)f_j\|_X^p\,du\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つときをいう. ここで $r_j : (0,1) \to \{-1,1\}$ は Rademacher 関数 $r_j(u) = \operatorname{sign}\sin(2^j\pi u)$ とする. また, 定数 C の下限を $\mathcal{T}$ の $\mathcal{R}$-bound といい $\mathcal{R}_{\mathcal{L}(X,Y)}(\mathcal{T})$ で表す.

注意 3. $n=1$ ととれば $\|T_1f_1\|_Y \le C\|f_1\|_X$ が成り立つ. すなわち $\mathcal{R}$ 有界性は T の有界性を含む. これより C_0 解析半群の生成に必要なレゾルベント評価を得ることができる.

L_p-L_q 最大正則性評価は, 次の Weis [5] による作用素値の Fourier multiplier theorem から得られる.

定理 4. X と Y を UMD Banach 空間とし, $1<p<\infty$ とする. また $m(\tau) \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathcal{L}(X,Y))$ はある正定数 κ があって次の評価を満たすとする.

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(X,Y)}(\{m(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}) \le \kappa,$$
$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(X,Y)}(\{\tau m'(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}) \le \kappa.$$

このとき作用素 $T_mf = \mathcal{F}^{-1}[m(\tau)[\mathcal{F}f](\tau)]$ は次の評価を満たす.

$$\|T_mf\|_{L_p(\mathbb{R},Y)} \le C_p\kappa\|f\|_{L_p(\mathbb{R},X)}.$$

ここで C_p は p のみに依存する定数である.

以上から, [4] による手法を用いるための最初のステップは $\mathcal{R}$ 有界性を示すことである. そこで本講演では, 主に次の (BE) に対応するレゾルベント問題を考察し, 以下の定理の証明の概略を説明する.

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + \nabla\mathfrak{p} + \alpha\mathrm{Div}\,(\Delta\mathbb{Q} - a\mathbb{Q}) = \mathbf{f}, \ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \\ \lambda\mathbb{Q} - \alpha\mathbf{D}(\mathbf{u}) - \Delta\mathbb{Q} + a\mathbb{Q} = \mathbb{G}. \qquad (\alpha = 2\eta/N) \end{cases} \tag{R}$$

定理 5. $1<q<\infty$, $\lambda_0>0$ とし, $\epsilon_0 \in (0,\pi/2)$ を次で定義する.

$$\epsilon_0 = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = 0, \\ \arg(1+i|\alpha|) & \text{if } \alpha \ne 0. \end{cases}$$

このとき任意の $\epsilon \in (\epsilon_0, \pi/2)$ に対して作用素族

$$\mathcal{A}(\lambda) \in \mathrm{Hol}(\Sigma_{\epsilon,\lambda_0}, \mathcal{L}(W_q^{0,1}(\mathbb{R}^N), W_q^2(\mathbb{R}^N)))$$
$$\mathcal{B}(\lambda) \in \mathrm{Hol}(\Sigma_{\epsilon,\lambda_0}, \mathcal{L}(W_q^{0,1}(\mathbb{R}^N), W_q^3(\mathbb{R}^N;\mathbb{S}_0)))$$

で次を満たすものが存在する. ただし $\Sigma_{\epsilon,\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg\lambda| < \pi - \epsilon, |\lambda| \ge \lambda_0\}$.

1. 任意の $\lambda \in \Sigma_{\epsilon,\lambda_0}$, $\mathbf{f} \in L_q(\mathbb{R}^N)$, $\mathbb{G} \in W_q^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{S}_0)$ に対して

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}(\lambda)(\mathbf{f},\mathbb{G}), \quad \mathbb{Q} = \mathcal{B}(\lambda)(\mathbf{f},\mathbb{G})$$

   は (R) の一意解である.

2. ある定数Cがあって, $n=0,1$ に対し

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(W_q^{0,1}(\mathbb{R}^N),L_q(\mathbb{R}^N))}(\{(\tau\partial_\tau)^n\mathcal{S}_\lambda\mathcal{A}(\lambda)\mid\lambda\in\Sigma_{\epsilon,\lambda_0}\})\leq C,$$
$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(W_q^{0,1}(\mathbb{R}^N),L_q(\mathbb{R}^N;\mathbb{S}_0)\times W_q^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{S}_0))}(\{(\tau\partial_\tau)^n\mathcal{T}_\lambda\mathcal{B}(\lambda)\mid\lambda\in\Sigma_{\epsilon,\lambda_0}\})\leq C.$$

ただし$\lambda=\gamma+i\tau$, $\mathcal{S}_\lambda\mathbf{u}=(\nabla^2\mathbf{u},\lambda^{1/2}\nabla\mathbf{u},\lambda\mathbf{u})$, $\mathcal{T}_\lambda\mathbb{Q}=(\nabla^3\mathbb{Q},\lambda^{1/2}\nabla^2\mathbb{Q},\lambda\mathbb{Q})$, Cはλに依存しない定数である.

参考文献

[1] H. Abels, G. Dolzmann, Y. Liu, *Well-Posedness of a Fully Coupled Navier-Stokes/Q-tensor System with Inhomogeneous Boundary Data* SIAM J. Math. Anal., **46 (4)** (2014), 3050–3077.

[2] Y. Liu and W. Wang, *On the initial boundary value problem of a Navier-Stokes/Q-tensor model for liquid crystals*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser., **B 23 (9)** (2018), 3879–3899.

[3] M. Schonbek and Y. Shibata, *Global well-posedness and decay for a $\mathbb{Q}$ tensor model of incompressible nematic liquid crystals in $\mathbb{R}^N$*, J. Differential Equations, **266 (6)** (2019), 3034–3065.

[4] Y. Shibata, *New thought on Matsumura-Nishida theory in the L_p-L_q maximal regularity framework*, J. Math. Fluid Mech., **24 (3)** (2022), Paper No. 66.

[5] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity.* Math. Ann., **319** (2001), 735–758.

[6] Y. Xiao, *Global strong solution to the three-dimensional liquid crystal flows of Q-tensor model*, J. Differential Equations, **262 (3)** (2017), 1291–1316.