Uniform Sobolev estimates for discrete Schrödinger operator in dimension three

平良晃一 (立命館大学理工学部)*

$d \geq 3$として$\mathbb{R}^d$上のLaplacianに対するレゾルベント評価

$$\|(-\Delta - z)^{-1}\|_{B(L^p(\mathbb{R}^d), L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C|z|^{\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}, \tag{1}$$

を一様Sobolev不等式と呼ぶ（[4], [9]）．ただし，$p, q \in (1, \infty)$は

$$\frac{2}{d+1} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{2}{d}, \ \frac{2d}{d+3} < \frac{1}{p} < \frac{2d}{d+1}, \ \frac{2d}{d-1} < \frac{1}{q} < \frac{2d}{d-3}$$

を満たすとする．不等式(1)はHardy-Littlewood-Sobolevの不等式（$(-\Delta)^{-1}$のL^p空間での有界性）のスペクトルパラメータzに関する一般化と考えられる．また，不等式(1)は散乱理論への応用[9]，複素ポテンシャルを持つSchrödinger作用素のKeller型固有値評価への応用[5]，Ginzburg-Landau方程式の外向波解の存在定理への応用[6]など幅広い応用を持つ．また，Stoneの定理とT^*T-argumentを使うと，(1)からFourier制限定理（Stein-Tomasの定理）

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{2}$$

が従う．逆に，[6]ではLaplacianの球対称性を用いて(2)から(1)を導出しており，[2]ではより一般的な枠組みでこれらの関係が明らかになった．更に，$p = \frac{2d}{d+2} =: 2_*, q = \frac{2d}{d-2} := 2^*$の場合を考え，Hölderの不等式を用いると$W \in L^d(\mathbb{R}^d)$（例えば$\varepsilon > 0$に対して$W = (1+|x|)^{-1-\varepsilon}$）に対して重みつきの$L^2$レゾルベント評価

$$\|W(-\Delta - z)^{-1}W\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C\|W\|^2_{L^d(\mathbb{R}^d)}\|(-\Delta - z)^{-1}\|_{B(L^{2_*}(\mathbb{R}^d), L^{2^*}(\mathbb{R}^d))} \leq C\|W\|^2_{L^d(\mathbb{R}^d)}$$

を得る．この評価が重要なのはパラメータz（特に$z = 0$と$|z| = \infty$の周り）について一様であるという点にある．これを用いると，例えばSchrödinger作用素の時間発展作用素e^{-itH}の時間減衰や散乱行列の$z = 0$の周りでの挙動の解析に応用できる．

本研究では，正方格子$\mathbb{Z}^d$上の離散Laplacian

$$H_0 u(x) = -\sum_{y \in \mathbb{Z}^d, |x-y|=1} (u(y) - u(x))$$

に対して(1)と同様の一様Sobolev評価が得られるか，という問題を考える．特に，スペクトルパラメータについて一様な不等式

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \|(H_0 - z)^{-1} f\|_{B(l^p(\mathbb{Z}^d), l^{p'}(\mathbb{Z}^d))} < \infty \tag{3}$$

がどのような値のpに対して成り立つかを考える．離散Laplacianは$\mathbb{R}^d$上のLaplacianの自然な離散化と考えられる他，結晶中の電子を強束縛近似した際のモデル方程式にも現れる点から物理学的にも重要な作用素であると言える．

*e-mail: `ktaira@fc.ritsumei.ac.jp`

過去の研究 [10] により，(3) は $1 \le p \le \frac{2d}{d+3}$ かつ $d \ge 4$ のとき成り立つこと，及び $p = \frac{d}{2}$ かつ $d \ge 5$ のときには (3) が成り立たないことが知られている．後者の結果は一様 Sobolev 評価が成り立つ p の値が，$\mathbb{R}^d$ 上の場合と比べて小さくなることを示唆している．また [10] の研究では次元に関する仮定 $d \ge 4$ を課しており，物理的に重要と考えられる 3 次元の場合については未知であった．そこでは (3) を示すために離散 Schrödinger 方程式の Strichartz 評価を最良な形で用いているため，[10] で使われた手法を 3 次元の場合に対して適用するのは難しい．

そこで本研究では [1] の手法に基づき，$d = 3$ の場合に調和解析の問題を通して (3) の証明を試みた．つまり，(3) の証明を，$h_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ を H_0 の（Fourier 掛け算作用素としての）シンボルとして振動積分

$$I_\lambda(x) := \int_{h_0(\xi)=\lambda} e^{2\pi i x\cdot\xi} \frac{d\mu(\xi)}{|\nabla h_0(\xi)|} \quad \lambda \in (0, 12) \tag{4}$$

が $|x| \to \infty$ でどの程度減衰するか，という問題に帰着させる．これは定常位相法（van der Corput の補題）をどのように一般化するかという古典的な調和解析の問題であり，関連して多くの研究がなされてきた（[7] とそこに記載されている参考文献を参照）．

(4) の形のままでは少し分かりにくいので，(4) を計算しやすい形に変形してみよう．スペクトルパラメータ λ を

$$\xi \in \{h_0(\xi) = \lambda\} =: M_\lambda \Rightarrow \partial_\xi h_0(\xi) \ne 0$$

が成り立つものとする（つまり，$h_0 - \lambda$ が実主要型であるとする）．今考えている離散 Schödiner 作用素の場合，$\lambda \notin \{4k\}_{k=0}^3$ であればこの仮定は満たされる．このとき，$\xi_0 \in M_\lambda$ として，かつ例えば $\partial_{\xi_3} h_0(\xi_0) \ne 0$ とすると，ξ_0 の近傍 U で

$$M_\lambda \cap U = \{(\xi', g(\xi'))\}, \quad \xi = (\xi', \xi_3)$$

と M_λ をグラフの形で書くことができる．更に U を小さくとって，$\chi \in C_c^\infty(U)$ に対して $\chi(\xi)\frac{d\mu(\xi)}{|\nabla h_0(\xi)|} = a(\xi')d\xi'$ と書いて (4) の被積分関数に χ を入れて局所化すれば，結局

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x'\cdot\xi' + x_3 g(\xi'))} a(\xi')d\xi'$$

という形の振動積分が $|x| \to \infty$ でどの程度減衰するか，という問題に帰着される．今，$x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3$ にはパラメータが 3 個あって考えるのが大変なので，最も簡単な場合，つまり $x = (0, x_3)$ の場合を考えると

$$J(x_3) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i x_3 g(\xi')} a(\xi')d\xi'$$

となる．さて，例えば $\partial_{\xi'} g(\xi') \ne 0$ であれば非停留位相法（本質的には滑らかな関数の Fourier 変換が急減少すること）により $J(x_3)$ は急減少する．一方，$\partial_{\xi'} g(\xi') = 0$ となる点がある場合には状況は大幅に異なり，J の減衰レートは g の高階微分の情報に依存する（停留位相法，van der Corput の補題の一般化）．例えば $g(\xi') = |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ の場合を考えると，$\partial_{\xi'} g(\xi')$ は $\xi' = 0$ で零になるが 2 階微分の行列式 $\det \partial_{\xi'}^2 g(\xi')$ は零にはな

らない．簡単のため $a(\sigma_1\xi_1, \sigma_2 x_2) = a(x_1, x_2)$（$\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}$）が成り立つとして，変数変換すれば

$$\begin{aligned} J(x_3) =& 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{2\pi i x_3(\xi_1^2+\xi_2^2)} a(\xi')d\xi' \\ =& \int_0^\infty\int_0^\infty e^{2\pi i x_3(\eta_1+\eta_2)} a(\sqrt{\eta_1}, \sqrt{\eta_2}) \frac{1}{\sqrt{\eta_1}\sqrt{\eta_2}} d\eta_1 d\eta_2 \end{aligned}$$

となり，この場合も結局関数の Fourier 変換がどの程度減衰するかという問題に帰着される（実際の証明ではより簡素な方法が用いられるが，このやり方は直感的に理解しやすい）．この積分の減衰レートは被積分関数の特異性の形に強く依存し，元を辿れば $g(\xi')$ の高階微分が消えれば消えるほど特異性が強くなり，減衰レートが遅くなることが見てとれるだろう．更に，$g(\xi') = \xi_1^2 + \xi_2^2$ の場合には特異性を計算するのは簡単であるが，g がより複雑な形状を持つ場合には同じ計算を実行するのは非常に困難である．実際，g の高階微分が消える場合の J の減衰レートの研究は古くから研究されており，これを一般的に実行するには代数幾何学の特異点解消論など，非常に高度な道具が必要であった．近年の論文 [7] では随分証明が簡素化されているように思えるが，依然としてその証明は理解するのが困難なので，より簡素化された証明がある方が望ましい．

次に，g の高階微分と M_λ の曲率の関係性について言及しよう．M_λ は局所的に g のグラフになっていることを思い出せば，その 2 階微分の行列 $\partial_{\xi'}^2 g(\xi')$ は本質的に（つまり，正の関数倍の差をのぞいて）M_λ の第 2 基本形式を表している．M_λ の曲率の情報はその第 2 基本形式によって決まるので，g の高階微分は M_λ の曲率の高階微分の情報に対応している．

以上をまとめると，M_λ の曲率の高階微分の情報と $I_\lambda(x)$ の減水レートが対応し，後者はレゾルベント評価 (3) と対応しているため，

- ℓ^p レゾルベント評価 (3) を調べるには M_λ の曲率やその高階微分を計算すれば良い

ことがわかる．

本研究では，$M_\lambda = \{h_0 = \lambda\}$ の曲率の影響を具体的に計算して ([7]) の結果を応用することにより (4) の減衰オーダーを決定し，以下の定理を得た．

定理 1 ([11])**.** $d = 3$ とする．
(i) (閾値以外での評価) $p \in [1, \frac{5}{4}]$ とする．正の数 $\varepsilon > 0$ に対し，

$$D_\varepsilon = \bigcap_{k=0}^{3} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4k| \geq \varepsilon\}.$$

とおく．この時，レゾルベント $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ は

$$\sup_{z\in D_\varepsilon\setminus\mathbb{R}} \|(H_0 - z)^{-1}\|_{B(l^p(\mathbb{Z}^3), l^{p'}(\mathbb{Z}^3))} < \infty$$

を満たす．
(ii) (閾値を含めた評価) $p \in [1, \frac{6}{5}]$ とすると (3) が成り立つ．

注意 1. [*10*] で示されているように，(i) の結果は最良である．

参考文献

[1] J. C. Cuenin, Eigenvalue estimates for bilayer graphene. Ann. Henri Poincaré **20** (2019), 1501–1516.

[2] J. C. Cuenin, From spectral cluster to uniform resolvent estimates on compact manifolds, preprint, (2020), https://arxiv.org/abs/2011.07254.

[3] J. C. Cuenin, R. Schippa, Fourier transform of surface-carried measures of two-dimensional generic surfaces and applications, Commun. Pure Appl. Anal. **21** (2022), no. 9, 2873–2889.

[4] C. E. Kenig, A. Ruiz, C. D. Sogge, Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators. Duke Math. J. **55** (1987), no. 2, 329–347.

[5] R. L. Frank. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. Bull. Lond. Math. Soc., **43**,(2011), 745–750.

[6] S. Gutiérrez, Non trivial L^q solutions to the Ginzburg-Landau equation, Math. Ann. **328**, (2004), 1–25.

[7] I. A. Ikromov, D. Müller, Uniform Estimates for the Fourier Transform of Surface Carried Measures in $\mathbb{R}^3$ and an Application to Fourier Restriction, J. Fourier. Anal. Appl **17**, (2011), 1292–1332.

[8] A. Jensen, T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of wave functions. Duke Math J **46**, (1979), 583–611.

[9] T. Kato, K. Yajima, Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect. Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[10] Y. Tadano, K. Taira, Uniform bounds of Birman-Schwinger operators for discrete Schrödinger operators. Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), 5243–5262.

[11] K. Taira, Uniform resolvent estimates for the discrete Schrödinger operators in dimension three, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 4, 1831–1855.