

On mathematical analysis of the primitive equation for the atmosphere

北村 兼人 (東京理科大学大学院理学研究科)

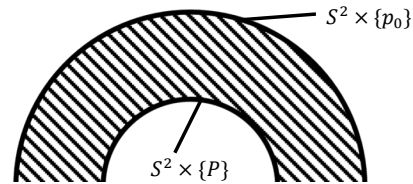
気象学において、台風の進路予想をはじめとする気象予報は重要な問題である。現在、その数値予報やシミュレーションに広く用いられている数理モデルがプリミティブ方程式であり、大気や海洋の状態の時間発展を記述する偏微分方程式系である。本講演では、プリミティブ方程式の物理的背景と [3] で提案された大気の運動を表す数理モデルの導出、およびその数学解析について解説する。

大気の運動を記述するプリミティブ方程式は、圧縮性流体の運動方程式、熱力学の第一法則、質量保存の法則、気体の状態方程式を基に導出されるが、通常の流体の運動と異なる点は、地球の自転を考慮するためコリオリ力を取り入れる点、運動の鉛直スケールが水平スケールより十分小さいため、運動方程式の鉛直成分を静水圧平衡で近似する点、鉛直座標を圧力 p とする気圧座標系を用いる点などが挙げられる。プリミティブ方程式は 1920 年代の L. F. Richardson ([6]) による気象の数値予報において提案された数理モデルであるが、その数学解析は 1990 年代における J. L. Lions, R. Temam, S. Wang による大気、海洋およびそれらの連成モデルに対する弱解の構成が先駆けとなった。[3] では、長期的な気象予報する際に無視できない非断熱加熱や摩擦を考慮するために粘性項（下線部）を水平方向の速度と温度の式に加えた以下のプリミティブ方程式 (PEs) を地球上を表す多様体 $M = S^2 \times (p_0, P)$ で考えた。

$$(PEs) \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} + \omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} + 2\Omega \cos \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v} + \text{grad} \Phi - \mu_1 \Delta \mathbf{v} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{g p}{R \bar{T}} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \right] = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{R}{p} T = 0 \\ \text{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \\ \frac{R^2}{C^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{v}} T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \frac{R}{p} \omega - \mu_2 \Delta T - \nu_2 \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{g p}{R \bar{T}} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial p} \right] = \frac{R^2}{C^2} \frac{\varepsilon}{C_p} \end{cases}$$

ここで、 Δ は球面上の水平ラプラスベトラミ作用素、 $\nabla_{\mathbf{v}}$ は $\mathbf{v}$ に関する共変微分、 $\mu_i, \nu_i, \Omega, \bar{T}, R, C, g, C_p, \varepsilon$ ($i = 1, 2$) は定数、水平速度 $\mathbf{v}$ 、温度 T 、鉛直 p 速度 ω 、ジオポテンシャル Φ が (PEs) における未知関数である。また (PEs) の境界条件を次で与える。

$$(BC) \begin{cases} p = P : (\mathbf{v}, \omega) = 0 & \frac{\partial T}{\partial p} = \alpha_s (T_s - T) \\ p = p_0 : (\mathbf{v}, \omega) = 0 & \frac{\partial T}{\partial p} = 0 \end{cases}$$



ここで、 $T_s \in C^\infty(S^2)$ は地表面の温度を表す既知関数、 α_s は地球のアルベドを含む地表の乱流遷移に係する正数であり、第 1 式は地表面の no-slip 条件とニュートンの条件、第 2 式は大気上層面の no-slip 条件と断熱条件をそれぞれ表している。(PEs), (BC) に初期条件を課した問題に対して、[8] では ω の p 方向の正則性を課した特殊な関数空間において、半離散化法を用いて時間大域的な弱解の存在が示されている。[3] では、 $p = (P - p_0)\zeta + p_0$ などの無次元化を行い、 $\int_0^1 \text{div} \mathbf{v} d\zeta = 0$ を満たすような関数空間を構築することによって、未知関数 ω を消去し、ガレルキン法を用いて弱解の存在が示されている。本講演では [3] におけるその証明について説明する。

参考文献

- [1] R. Dautray R and J.L. Lions 1992 Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology (Evolution Problems I vol 5), Springer, 1992
- [2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998
- [3] J. L. Lions, R. Temam and S. Wang, New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications, Nonlinear 5, 1992, 237-288
- [4] 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965
- [5] 小倉義光, 総観気象学入門. 東京大学出版会, 2015
- [6] L. F. Richardson, Weather prediction by numerical Press, Cambridge University Press, 1922
- [7] 田中博, 地球大気の科学. 共立出版, 2017
- [8] S. Wang, On solvability for the equations of the large-scale atmospheric motion, 1988, Thesis Lanzhou University