

Existence and properties of solitary wave solutions to Benjamin–Ono type equations

國分 海斗 (東京理科大学)*

次の定常問題 (SP) を考える:

$$(SP) \quad D_x \phi + c\phi = f(\phi), \quad x \in \mathbb{R}$$

ただし, $\phi = \phi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数, $c > 0$ を定数, f を非線形項とする. また, Fourier 変換を $\mathcal{F}$ で表し, $\sigma \geq 0$ に対して, $D_x^\sigma := \mathcal{F}^{-1}|\xi|^\sigma \mathcal{F}$ と定める. $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ に対して, $f(\phi) = \phi^p$ とした場合の (SP) は, 一般化 Benjamin–Ono 方程式

$$(GBO) \quad \partial_t u + \partial_x(u^p) - \partial_x D_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

の進行波解とよばれる, $u(t, x) = \phi(x - ct)$ の形をした特殊解を構成する ϕ が満たすべき方程式として現れる. 特に, $p = 2$ のときは, Benjamin [2] により, $\phi(x) = \frac{2c}{1+c^2 x^2}$ という解をもつことが示されている. さらに, Weinstein は, $p \geq 2$ のときに**基底状態**とよばれる (SP) の特殊解の存在を示した [3]. なお, (SP) の基底状態を用いて構成された (GBO) の進行波解の安定性に関する結果が, Weinstein [3], Angulo Pava [1, Chapter 8] などにより得られている.

本研究では, 定常問題 (SP) の非線形項を,

$$(*) \quad f(\phi) = -\phi^p + \phi^q, \quad p, q \in \mathbb{N}, 2 \leq p < q$$

とし, (SP) に対応する作用汎関数 $S_c: H^{1/2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$S_c(u) = \frac{1}{2} \|D_x^{1/2} u\|_{L^2}^2 + \frac{c}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx - \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}} u^{q+1} dx$$

の性質を調べるにより, (SP) の解の存在を示し, 得られた解の性質を考察した.

定理 (SP) の非線形項は (*) を満たすものとする. このとき, (SP) の解は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級である. さらに, p, q の偶奇によって, (SP) の解のについて以下の性質が成り立つ:

$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$	偶数	奇数
偶数	正值偶関数解が存在する.	正值偶関数の基底状態が存在する. 負値解は存在しない. 符号変化を伴う基底状態は存在しない.
奇数	正值偶関数解が存在するが, いずれも基底状態ではない. 負値偶関数の基底状態が存在する. 符号変化を伴う基底状態は存在しない.	正值偶関数の基底状態が存在する. 負値偶関数の基底状態が存在する. 符号変化を伴う基底状態は存在しない.

参考文献

- [1] J. Angulo Pava, *Nonlinear dispersive equations: existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions*, Mathematical Surveys and Monographs, no. 156, Amer. Math. Soc., 2009.
- [2] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. **29** (1967), no. 3, 559–592.
- [3] M. I. Weinstein, *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), no. 10, 1133–1173.

* kaito.kokubu.kk@gmail.com