

滑らかでないポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の基本解の短時間挙動

瀧澤 駿 (東京理科大学)

本研究では以下のスカラーポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の基本解の短時間挙動について考える：

$$(1) \quad i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}\Delta u(t, x) = V(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, スカラーポテンシャル $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数, $\partial_t u = \frac{\partial}{\partial t} u$, $\partial_{x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j} u$ ($j = 1, \dots, n$), $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ である.

先行研究 [1] では次のことが示されている：

$V(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ が二次以下の増大度をもつ場合に十分小さな $T > 0$ が存在して, 任意の $(t, x, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して (1) の基本解 $E(t, x, y)$ は, 以下の性質をもつ $S(t, x, y), a(t, x, y)$ を用いて

$$(2) \quad E(t, x, y) = (2\pi it)^{-n/2} e^{iS(t, x, y)} a(t, x, y)$$

で表される. ここで $S(t, x, y)$ については (t, x, y) に関して連続であり $|\alpha + \beta| \geq 2$ となる任意の多重指数 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して定数 $C_{\alpha, \beta} > 0$ が存在し, $\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (S(t, x, y) - \frac{(x-y)^2}{2t}) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \cdot t$ となる関数である. $a(t, x, y)$ については (t, x, y) に関して連続であり, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $t \downarrow 0$ のとき $\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (a(t, x, y) - 1) \right| \rightarrow 0$ (x, y に関して一様) となる関数である.

先行研究 [3] では [1] の手法を用いて $V(t, x)$ の滑らかさについて, $|\alpha| = 2$ となる任意の多重指数 α に対して $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial_x^\alpha V(t, \cdot)\|_{H^{n+1}(B(x, 1))} < \infty$ となる場合まで仮定を緩めた. ここで, $B(x, 1)$ は中心 x , 半径 1 の開球である.

本研究では, [1], [3] の手法の代わりに [2] の手法を用いて, 次の結果を得た. $V(t, x)$ に次の仮定を課す.

仮定 1. $V(t, x)$ は各 $t \in \mathbb{R}$ に対して x に関して 2 階微分可能であり, $|\alpha| \leq 1$ をみたす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\partial_x^\alpha V(t, x)$ が (t, x) に関して連続とする. また, $1 \leq |\alpha| \leq 2$ に対して定数 $C_\alpha > 0$ が存在して

$$(3) \quad |\partial_x^\alpha V(t, x)| \leq C_\alpha, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

をみたすとする.

主定理. $n = 1$ とし, 実数値関数 $V(t, x)$ は仮定 1 をみたすとする. 任意の $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して, (1) の基本解 $E(t, x, y)$ は以下の性質をもつ関数 $S_0(t, x, y), a_0(t, x, y)$ および $r(t, x, y)$ を用いて

$$(4) \quad E(t, x, y) = (2\pi it)^{-1/2} e^{iS_0(t, x, y)} a_0(t, x, y) + r(t, x, y)$$

で表される. ここで $S_0(t, x, y)$ は (t, x, y) に関して連続で, $t \downarrow 0$ のとき $\left| S_0(t, x, y) - \frac{(x-y)^2}{2t} \right| \rightarrow 0$ (x, y について各点) および, $\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left(S_0(t, x, y) - \frac{(x-y)^2}{2t} \right) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \cdot t$ ($1 \leq |\alpha + \beta| \leq 2$) をみたす関数である. $a_0(t, x, y)$ については $a_0(t, x, y) \rightarrow 1$ (x, y に関して一様) となる関数である. $r(t, x, y)$ については, $R(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}} r(t, x, y)f(y)dy$ としたときに, 任意の $T > 0$ に対して定数 $C_T > 0$ が存在して $\|R(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))} \leq C_T t$ ($0 < t < T$) をみたす関数である.

参考文献

- [1] Daisuke Fujiwara. Remarks on convergence of the Feynman path integrals. *Duke Math. J.*, 47, 1980.
- [2] Keiichi Kato, Masaharu Kobayashi, and Shingo Ito. Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials. *J. Funct. Anal.*, 266, 2014.
- [3] Fabio Nicola. On the time slicing approximation of Feynman path integrals for non-smooth potentials. *J. Analyse. Math.*, 137, 2019.