非線形 Klein-Gordon 方程式系の数値解析

立町 悠夏 （東京理科大学）

次の空間 3 次元の非線形 Klein-Gordon 方程式系

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u + 2vu = 0, \\ \partial_t^2 v - \Delta v + M^2 v + u^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

の初期値問題に対して数値計算を行う．ここで，$u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ は実数値関数，m, M は正の定数で質量である．また，(1) では以下のエネルギーが保存される:

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ (\partial_t u)^2 + (\partial_t v)^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + m^2u^2 + M^2v^2 + 2u^2v \right\} dx.$$

[2] で単独の非線形 Klein-Gordon 方程式の構造保存差分スキームが提案されている．今回はこれを拡張し方程式系 (1) における差分スキームを考え，離散エネルギーを保存するか調べた．以下が得られた結果である:

定理. $r := |x|$, $0 \le r \le L$, $t > 0$ において空間刻み幅を $\Delta r := L/J$，時間刻み幅を Δt とし，u_j^n を $ru(r,t) = j\Delta r\, u(j\Delta r, n\Delta t)$ の近似とする (v_j^n も同様，$j = 0, ..., J$, $n = 0, ..., N$)．さらに $\delta^2 u_j^n$ を空間 2 階中心差分とする．(1) の球対称解において以下の差分スキームを考える:

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \delta^2 u_j^n + \dfrac{m^2}{2}\left(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}\right) + \dfrac{1}{j\Delta r}\dfrac{G(u_j^{n+1}, v_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1}, v_j^{n+1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} = 0, \\ \dfrac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \delta^2 v_j^n + \dfrac{M^2}{2}\left(v_j^{n+1} + v_j^{n-1}\right) + \dfrac{1}{j\Delta r}\dfrac{G(u_j^{n-1}, v_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1}, v_j^{n-1})}{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}} = 0. \end{cases}$$

ここで，$G(u,v) = u^2v$ である．上の差分スキームは以下の離散エネルギーを保存する:

$$\begin{aligned} \frac{E_n}{\Delta r} =& \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right)^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}\right)^2 \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta r}\right)\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta r}\right) + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta r}\right)\left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta r}\right) \\ &+ m^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2}{2} + M^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(v_j^{n+1})^2 + (v_j^n)^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{G(u_j^{n+1}, v_j^{n+1}) + G(u_j^n, v_j^n)}{j\Delta r}. \end{aligned}$$

なお，実際の数値計算はソフトウェア Scilab にて行った．また，論文ではこれをさらに拡張し (i) 複素数値関数 u, v の方程式系，(ii) 複素数値関数 u, v, w の方程式系の差分スキームも考え，さらに質量などを変化させた場合の計算結果に対し考察した．

参考文献

[1] N. Hayashi, T. Ozawa, K. Tanaka,
On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction,
Ann. I. H. Poincaré - AN **30** (2013), 661-690.

[2] W. Strauss, L. Vazquez,
Numerical Solution of a Nonlinear Klein-Gordon Equation,
J. Comput. Phys. **28** (1978), 271-278.