分数べき Fourier 変換によるジャイレーター変換の特徴づけとその超関数への拡張

鈴木 俊夫（東京理科大学）

$f \in L^2(\mathbf{R}^2)$, $a \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(a)}[f](\omega_1,\omega_2) &= \iint_{\mathbf{R}^2} f(x_1,x_2)G_a(x_1,x_2;\omega_1,\omega_2)dx_1dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi|\sin a|}\iint_{\mathbf{R}^2} f(x_1,x_2)\exp\left(i\frac{\omega_1\omega_2+x_1x_2}{\tan a} - i\frac{\omega_1x_2+\omega_2x_1}{\sin a}\right)dx_1dx_2\end{aligned}$$

を f のジャイレーター変換と呼ぶ．これは 2000 年に "cross gyrator" という名前で発表され [3]，現在では光学を始めとした工学分野で用いられる変換である．

一方，$f \in L^2(\mathbf{R}^2)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbf{R}^2$ に対して，その分数べき Fourier 変換は

$$\mathcal{F}^{(\boldsymbol{\alpha})}[f](\omega) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x)K_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\omega)dx$$

で定義される．ここで積分核は $K_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\omega) = K_{\alpha_1}(x_1,\omega_1)K_{\alpha_2}(x_2,\omega_2)$.

$$K_{\alpha_j}(x_j,\omega_j) = \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha_j}{2\pi}}\exp\left\{\frac{i\left(|x_j|^2+|\omega_j|^2\right)}{2\tan\alpha_j} - \frac{ix_j\cdot\omega_j}{\sin\alpha_j}\right\} \quad (j=1,2)$$

で与えられる．これは一般の Fourier 変換の拡張になっており，1980 年に発表された [2]．本講演では，このジャイレーター変換と分数べき Fourier 変換との関連について得られた結果を紹介する．特に分数べき Fourier 変換から導かれる，ジャイレーター変換の特徴づけ（他の変換との関係，満たすべき微分方程式など）について紹介する．さらに，ジャイレーター変換の超関数への拡張についても報告する．

なお，本研究は香川智修氏（公立諏訪東京理科大学）との共同研究 [1] に基づく．

参考文献

[1] T. Kagawa, T. Suzuki, Characterizations of the gyrator transform via the fractional Fourier transform, Integral. Transform Spec. Funct. (2022).

[2] V. Namias, The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics J. Inst. Math. Its Appl., 25, pp. 241-265 (1980).

[3] R. Simon and K. B. Wolf, Structure of the set of paraxial optical systems, J. Opt. Soc. Am. A 17, pp. 342-355 (2000).