

Does a critical mass phenomenon happen in a higher dimensional Keller–Segel system with indirect signal production?*

田中 悠也 (東京理科大学)[†]

1. 序

次の間接的なシグナル生成を伴う準線形 Keller–Segel 系について考える:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot ((u+1)^{m-1} \nabla u) - \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in B_1, t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu(t) + w, & x \in B_1, t > 0, \\ w_t + w = u, & x \in B_1, t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial B_1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), & x \in B_1. \end{cases}$$

ここで, $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) は原点を中心とする単位球とし, $\mu(t) := \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} w(x, t) dx$ とする. また, $m \geq 1$ とし, ν は ∂B_1 の外向き単位法線ベクトル, $u_0 \in C(\overline{B_1})$, $w_0 \in C^1(\overline{B_1})$ は非負の初期値とする. 問題 (1) は, Strohm–Tyson–Powell [5] により提唱されたモデル (第2方程式を $v_t = \Delta v - v + w$ に置き換えた問題) を単純化したものであり, ある昆虫がフェロモンに引き寄せられる現象を記述している. ここで u, w はそれぞれ飛行中の昆虫の密度と巣にいる昆虫の密度, v は巣にいる昆虫が生成するフェロモンの濃度を表す.

$m = 1$ とした問題 (1) に対して, Tao–Winkler [6] は, 空間2次元の場合に解の有界性と解の爆発に関する質量臨界現象が起きることを解明した. 具体的には, 球対称な初期値 u_0, w_0 が $\int_{B_1} u_0(x) dx < 8\pi$ を満たすとき, 解は時間大域的に存在して有界であり, $\int_{B_1} u_0(x) dx > 8\pi$ を満たすとき, 無限時刻で爆発する解が存在することを示した. また, Laurençot [1] は, 第2方程式を $v_t = \Delta v - v + w$ に置き換えた問題において [6] の結果と同様の結果を示し, さらに球対称性を外した場合の閾値が 4π になることを解明した. これらの結果は, 直接的なシグナル生成を伴う Keller–Segel 系

$$(2) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u \end{cases}$$

($\tau \in \{0, 1\}$) に対して既に知られている質量臨界現象に対応した結果となっている ([2, 3, 4]). なお, 問題 (2) の爆発解の爆発時刻は有限時刻であるのに対して, [1, 6] における爆発解の爆発時刻は無限時刻となることに注意する.

上記のように, $m = 1$ とした問題 (1) に対しては, 空間2次元の場合の解の有界性と解の爆発の臨界現象が解明されている. しかし, 問題 (1) において, 3次元以上の場合の解の挙動に関する結果はまだ得られていない. そこで本研究では,

問題 (1) に対して, 3次元以上の場合に質量臨界現象が起きるか?

という疑問に対する考察を行なった. 本講演では, $m \geq 1$ とした問題 (1) に対する解の有界性と解の爆発に関して得られた結果を報告する.

* 本研究は Johannes Lankeit 氏, Mario Fuest 氏 (Leibniz University Hannover) との共同研究に基づく.

[†] e-mail: yuya.tns.6308@gmail.com

2. 主結果

問題 (1) の解の時間大域存在と有界性について、次の結果を得た。

主結果 1 (時間大域解の存在と有界性)

$n \geq 3$, $m \geq 2 - \frac{2}{n}$ と仮定する。このとき、任意の非負の初期値 $u_0 \in C(\overline{B_1})$, $w_0 \in C^1(\overline{B_1})$ に対して、問題 (1) の時間大域的古典解 (u, v, w) が一意的に存在する。さらに、以下を満たすある定数 $M_c > 0$ が存在する: m, u_0 が

$$(3) \quad m > 2 - \frac{2}{n} \quad \text{または} \quad m = 2 - \frac{2}{n} \quad \text{かつ} \quad \int_{B_1} u_0(x) dx < M_c$$

を満たすとき、問題 (1) の解 (u, v, w) は次の意味で有界である:

$$\exists C > 0; \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_1)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_1)} + \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_1)} \leq C \quad (t > 0).$$

問題 (1) の解の爆発については、次の結果を得た。

主結果 2 (解の爆発)

$n \geq 3$, $m \leq 2 - \frac{2}{n}$ と仮定する。さらに、 m と定数 $M > 0$ が以下を満たすとする:

$$(4) \quad m < 2 - \frac{2}{n} \quad \text{かつ} \quad M > 0 \quad \text{または} \quad m = 2 - \frac{2}{n} \quad \text{かつ} \quad M > 2^{\frac{2}{n}} n^{n-1} |\partial B_1|.$$

このとき、ある $R \in (0, 1)$ が存在し、任意の $\eta > 0$ に対して以下を満たす $\Gamma_1, \Gamma_2, \alpha, \gamma, C > 0$ が存在する: 非負で球対称な初期値 $u_0 \in C(\overline{B_1})$, $w_0 \in C^1(\overline{B_1})$ が,

$$\begin{aligned} \int_{B_1} u_0(x) dx &= M, \\ \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u_0(x) dx &\geq \Gamma_1, & r \in (0, R), \\ \frac{1}{|B_1 \setminus B_r|} \int_{B_1 \setminus B_r} u_0(x) dx &\leq \gamma, & r \in (R, 1), \\ \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} w_0(x) dx &\geq \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} w_0(x) dx + \Gamma_2, & r \in (0, R), \\ \frac{1}{|B_1 \setminus B_r|} \int_{B_1 \setminus B_r} w_0(x) dx &\leq \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} w_0(x) dx - \eta, & r \in (R, 1) \end{aligned}$$

を満たすとき、時刻 $T^* \in (0, \infty]$ と問題 (1) の古典解 (u, v, w) が一意的に存在して、次を満たす:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_1)} \geq C e^{\alpha t} \quad (t \in (0, T^*)).$$

特に、 $m = 2 - \frac{2}{n}$ のときは $T^* = \infty$ となり、 u は無限時刻で爆発する。

注意. 主結果 1, 2 により、3次元以上の場合は $m = 2 - \frac{2}{n}$ を臨界として、解の有界性と爆発の結果が得られることがわかる。さらに、条件 (3), (4) により、 $m = 2 - \frac{2}{n}$ のときは質量臨界現象が起きることがわかる。ただし、 M_c の具体的な値は不明であるため、まだ条件にギャップがある。

3. 証明の方針

主結果1の証明では, 十分大きな p に対して,

$$\frac{1}{p} \int_{B_1} u^p(x, t) dx + \frac{1}{p+1} \int_{B_1} w^{p+1}(x, t) dx$$

に関するある常微分不等式を導出して解の時間大域存在と有界性を示す. なお, [6] では解の球対称性を利用した精密な評価を行なって解の有界性を示しているが, 本研究では球対称性を用いずに, Gagliardo–Nirenberg の不等式により, 走化性項 $-\nabla \cdot (u \nabla v)$ から現れる項を拡散項から得られる項に吸収させることで解の有界性を示している. そのため, 主結果1における M_c の具体的な値は不明となっている.

主結果2の証明では, まず解の球対称性と関数

$$U(\xi, t) := \int_0^{\xi^{\frac{1}{n}}} r^{n-1} u(r, t) dr$$

を用いて問題(1)を書き換える. そして, $\underline{U}_\xi(0, t) \geq Ce^{\alpha t}$ を満たすある関数 $\underline{U}(\xi, t)$ が, その問題の劣解になることを示す. ここで, $\underline{U}(\xi, t)$ は [6] で扱っている関数と同様ののものであり, ξ が十分小さいときにある関数 $a(t), b(t)$ を用いて,

$$\underline{U}(\xi, t) := \frac{a(t)\xi}{b(t) + \xi}$$

と表される関数である. [6] における証明との違いは, $\underline{U}(\xi, t)$ を用いた際に現れる, 問題(1)の拡散項に対応する項

$$(5) \quad 2n^2 \left(\frac{na(t)b(t)}{(b(t) + \xi)^2} + 1 \right)^{m-1} \frac{\xi^{1-\frac{2}{n}}}{b(t) + \xi}$$

を $M = \int_{B_1} u_0(x) dx$ に依存する項に吸収させる際の評価にある. $n = 2, m = 1$ の場合である [6] では, (5) は $\frac{8}{b(t)+\xi}$ となりそのまま目標の項に吸収できるが, 本研究ではそれができない. そこで本研究では $m \geq 1$ のときに (5) を $\xi^{2-\frac{2}{n}-m}$ で制御できることを用いて, $m < 2 - \frac{2}{n}$ のときには ξ の小ささ, $m = 2 - \frac{2}{n}$ のときには $M = \int_{B_1} u_0(x) dx$ の大きさを利用することで目標の項に吸収させる. その際の条件が (4) であり, これは [6] における条件の一般化になっている. その後, 比較原理を用いることにより主結果2が示される.

参考文献

- [1] P. Laurençot, *Global bounded and unbounded solutions to a chemotaxis system with indirect signal production*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **24** (2019), no. 12, 6419–6444.
- [2] T. Nagai, *Blowup of nonradial solutions to parabolic–elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, J. Inequal. Appl., **6** (2001), no. 1, 37–55.
- [3] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl., **5** (1995), no. 2, 581–601.
- [4] T. Nagai, T. Senba, K. Yoshida, *Application of the Trudinger–Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), no. 3, 411–433.
- [5] S. Strohm, R. C. Tyson, J. A. Powell, *Pattern formation in a model for mountain pine beetle dispersal: linking model predictions to data*, Bull. Math. Biol., **75** (2013), no. 10, 1778–1797.
- [6] Y. Tao, M. Winkler, *Critical mass for infinite-time aggregation in a chemotaxis model with indirect signal production*, J. Eur. Math. Soc., **19** (2017), no. 12, 3641–3678.