

磁場中のシュレーディンガー方程式の解の モジュレーション空間における評価について¹

村松 亮 (東北大学大学院 理学研究科)

1 導入

本研究では、以下の磁場中のシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} (\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし、 $u(t, x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり、 $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $\mathbf{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ で、 $\mathbf{a}(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_n(t, x))$ とし、 $(\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t, x))^2$ である。さらに、 $\mathbf{a}(t, x)$ には以下の仮定を課す。

仮定 A. 各 $j = 1, \dots, n$ に対し $a_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり、 $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し、

$$(2) \quad \exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \max_{1 \leq j \leq n} |\partial_x^\alpha a_j(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{\rho - |\alpha|}.$$

定義 1.1 (波束変換). $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を、以下で定める：

$$W_\varphi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y - x)} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

定義 1.2 (モジュレーション空間). $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする。このとき、 $1 \leq p, q \leq \infty$ に対し、モジュレーション空間 $M_\varphi^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を以下のように定義する：

$$M_\varphi^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{M_\varphi^{p,q}} \equiv \| \|W_\varphi f(x, \xi)\|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} < \infty \right\}.$$

2 主結果

本研究では、仮定 A をみたすベクトルポテンシャル $\mathbf{a}(t, x)$ を付与したシュレーディンガー方程式 (1) の解のモジュレーション空間におけるノルム評価を考察した。

主定理. $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし、 $\varphi(t, x) = e^{it\Delta/2} \varphi_0(x)$ と定める。また $\mathbf{a}(t, x)$ は仮定 A をみたすとし、 $u(t, x)$ は $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解であるとする。

このとき、 $T > 0$ に対してある $C_T > 0$ が存在して、任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し、

$$(3) \quad \|u(t, \cdot)\|_{M_{\varphi(t, \cdot)}^{p,p}} \leq C_T \|u_0\|_{M_{\varphi_0}^{p,p}}, \quad t \in [-T, T].$$

¹本講演は加藤圭一氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく。

注意 2.1. ベクトルポテンシャル $\mathbf{a}(t, x)$ が空間に関して劣 -1 次増大, つまり $\rho < -1$ が存在して任意の多重指数 α に対し条件 (2) をみたすとき, 上記の結果よりも強い結果を得ることができる.

Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers[1], Wang-Hudzik[4] では, 自由シュレディンガー方程式, Kato-Kobayashi-Ito[2] では自由および調和振動子付きシュレディンガー方程式に対し, それぞれ解のモジュレーション空間におけるノルム評価が与えられている. また, [3] では劣 2 次の空間増大度を持つ一般のスカラーポテンシャルを付与したシュレディンガー方程式に対し, (2) と同じモジュレーションノルム評価が与えられている.

本研究の主定理は, [3] を劣 1 次増大するベクトルポテンシャル $\mathbf{a}(t, x)$ に対して拡張したものである.

3 証明の概略

方程式の線形性により, 十分小さい T に対して (2) を示せばよい. $t \in \mathbb{R}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) := x(s; t, x, \xi)$, $\xi(s) := \xi(s; t, x, \xi)$ を

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) - \mathbf{a}(s, x(s)), & x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) = \nabla_x(\xi(s) \cdot \mathbf{a}(s, x(s)) - \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(s, x(s))), & \xi(t) = \xi \end{cases}$$

の解とする. ただし $\dot{a} = \frac{d}{ds}a$. このとき, (1) の解は波束変換と上記の特性曲線を用いて

$$(5) \quad \begin{aligned} W_{\varphi(t, \cdot)} u(t, x, \xi) &= e^{-i \int_0^t h(s; t, x, \xi) ds} \left(W_{\varphi(0, \cdot)} u_0(x(0; t, x, \xi), \xi(0; t, x, \xi)) \right. \\ &\quad \left. - i \int_0^t e^{i \int_0^\tau h(s; t, x, \xi) ds} R u(\tau, x(\tau; t, x, \xi), \xi(\tau; t, x, \xi)) d\tau \right) \end{aligned}$$

と表示できる. ベクトルポテンシャルのない場合を扱った [3] では積分方程式両辺の L_x^p - L_ξ^p ノルムをとり, 剰余項をグロンウォールの不等式を用いて評価することで目標の不等式 (2) が得られた. しかし今回は磁場中のシュレディンガー方程式特有の一階微分に由来する項により, 一般の L^p -ノルムに対し同様の方法を用いることができない. そこで, $p = 2, \infty$ の場合をまず示し, 補間不等式と双対性の議論を用いて証明を完了させる.

ここでは証明の中核である L_x^∞ - L_ξ^∞ ノルム評価について述べる. $\lambda > 1$ に対し, $\varphi^\lambda(t, x) = \lambda^{n/2} \varphi(\lambda^2 t, \lambda x)$ とする. 重要なのは十分大きい λ に対して次の評価を示すことである:

$$(6) \quad \left\| \int_0^t R(\tau, x(\tau), \xi(\tau)) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_\xi^\infty} \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T]} \|W_{\varphi^\lambda(t, \cdot)} u(t, x, \xi)\|_{L_x^\infty L_\xi^\infty}.$$

このとき, 窓関数が $\varphi^\lambda(t, x)$ のときに対して L_x^∞ - L_ξ^∞ ノルム評価が示される. モジュレーションノルムは窓関数に依らないからこれにより一般の $\varphi(t, x)$ で L_x^∞ - L_ξ^∞ ノルム評価が示されたことになるが, (6) を示す際に次の基本的な特性曲線の評価式を用いる:

補題 3.1. $\delta > 0$ とする. 十分小さい $0 < T < 1$ と T に依存しない定数 $C_\delta > 0$ が存在して, 任意の $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ に対して次が成立.

$$\int_0^T \langle x(\tau; t, x, \xi) \rangle^{-1-\delta} |\xi(\tau; t, x, \xi)| d\tau \leq C_\delta (1 + T)$$

参考文献

- [1] Bényi, A., Gröchenig, K., Okoudjou, K.A., Rogers, L.G.: Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces, *Journal of Functional Anal.*, **246**, 366–384 (2007).
- [2] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, *Tohoku Math.J.*, **64**, 223–231 (2012).
- [3] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, *Journal of Functional Anal.*, **266**, 733–753 (2014).
- [4] Wang, B., Hudzik, H.: The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data, *J. Differential Equations*, **232**, 36–73 (2007).
- [5] Wang, B., Zhao, L., Guo, B.: Isometric decomposition operators, function spaces $E_{p,q}^\lambda$ and applications to nonlinear evolution equations, *J. Functional Anal.*, **233**, 1–39 (2006).