圧縮性弾性体の伸縮運動を表現する
初期値境界値問題について

小杉 千春　(山口大学・創成科学研究科)

本講演では, 特異点をもつ応力関数を伴う粘性項つきの beam 方程式に対する次の初期値境界値問題 $\mathrm{P}_\mu(u_0,\, v_0)$ $(\mu \geq 0)$ を考える. 未知関数は, 時刻 $t \in [0,T]$ での $\mathbb{R}^2$ 上の位置を表す $u = u(t,x)(x \in [0,1])$ で, 定義域は $Q(T) := (0,T) \times (0,1)$ $(T > 0)$ である.

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \mu\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0, \quad \varepsilon = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| - 1 \quad \text{on } Q(T),\\
&\frac{\partial^i}{\partial x^i}u(0) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}u(1) \quad \text{on } (0,T) \quad \text{for } i = 0,1,2,3,\\
&u(0) = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(0) = v_0 \quad \text{on } (0,1).
\end{aligned}
$$

ここで, ρ は弾性体の線密度を表す正定数, $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ は定数, ε は歪み, u_0, v_0 はそれぞれ弾性体の初期位置と初速度を表す. $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ は応力関数で, 次式で定義する.

$$
f(\varepsilon) = \frac{\kappa}{4}\left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^4}\right), \quad \text{ただし } \kappa > 0 : \text{定数}.
$$

以下, $H := L^2(0,1)^2$, $V_1 := \left\{z \in H^2(0,1)^2 | z(0) = z(1), z_x(0) = z_x(1)\right\}$, $X := \{z \in H^1(0,1)^2 | z(0) = z(1)\}$ とする.

これまでに, P_0, P_μ の弱解に対し, 以下の結果を得ている.

定理 1.([1]) $T > 0$, $u_0 \in V_1$, $v_0 \in H$ とする. このとき, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単調増加な Lipschitz 連続関数であり $f(0) = 0$ ならば, $\mathrm{P}_0(u_0, v_0)$ は $[0,T]$ 上の唯一つの弱解をもつ.

定理 2.([2]) $\mu > 0$, $T > 0$, $u_0 \in V_1$, $|u_{0x}| > 0$ on $[0,1]$, $v_0 \in H$ とする. このとき, $\mathrm{P}_\mu(u_0, v_0)$ は $[0,T]$ 上の唯一つの弱解をもつ.

定理 3. $\mu > 0$, $u_0 \in V_1$, $|u_{0x}| > 0$ on $[0,1]$, $v_0 \in H$ とし, u_μ を P_μ の時間大域的弱解とする. このとき, $\exists u \in W^{1,\infty}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V_1)$ s.t.

$$
\begin{aligned}
&u_\mu \to u \text{ weakly}* \text{ in } L^\infty(0,T;V_1), \text{ weakly}* \text{ in } W^{1,\infty}(0,T;H),\\
&\text{strongly in } L^2(0,T;X) \text{ as } \mu \to 0 \text{ かつ } u \text{ は } \mathrm{P}_0 \text{ の時間大域的弱解である.}
\end{aligned}
$$

本講演では, $\mathrm{P}_\mu(\mu > 0)$ の強解に対する ω 極限集合に関する結果 ([3]) も紹介する.

参考文献

[1] T. Aiki and C. Kosugi, Existence and uniqueness of weak solutions for the model representing motions of curves made of elastic materials, Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 36, 45-56(2021).

[2] C. Kosugi, Solvability of a PDE model with nonlinear stress function having singularity for compressible elastic curve, to appear in Advances in Mathematical Sciences and Applications.

[3] C. Kosugi and T. Aiki, Large time behavior of solutions for PDE model for compressible elastic curve (Submitted).