

斥力的連立シュレディンガー方程式の偶対称基底状態

佐藤 洋平

$N \leq 3$ とする. 次の斥力的連立シュレディンガー方程式を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 u_1^3 - a(x) u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \quad u_1 \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = \mu_2 u_2^3 - a(x) u_1^2 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \quad u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1)$$

ここで λ_i, μ_i ($i = 1, 2$) は正の定数とし関数 a は次を満たすとする.

$$(a.1) \quad a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \quad a(x) \geq 0, \quad a(x) \not\equiv 0.$$

$$(a.2) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_0 \geq 0.$$

$$(a.3) \quad a(-x) = a(x).$$

特に a が正の定数のときも (a.1)–(a.3) を満たす. 次の記号を用いる. $p > 0, \lambda > 0$ に対し

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx, \quad \langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv) dx, \quad \|u\|_\lambda^2 = \langle u, u \rangle_\lambda$$

とおく. $\mathcal{H} = H^1(\mathbb{R}^N)^2$ とおき, $\mathcal{H}$ の元を $\vec{u} = (u_1, u_2)$ とかく. (1) に対応する汎関数は

$$I(\vec{u}) = \frac{1}{2} \|u_1\|_{\lambda_1}^2 + \frac{1}{2} \|u_2\|_{\lambda_2}^2 - \frac{1}{4} \mu_1 \|u_1\|_{L^4}^4 - \frac{1}{4} \mu_2 \|u_2\|_{L^4}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_1^2 u_2^2 dx$$

である. $a(x) \geq 0$ のとき (1) は斥力的と呼ばれる. (1) が斥力的なときは, 一般には基底状態と呼ばれる次の最小化問題を達成する (1) の正值解の存在は期待できない.

$$b = \inf_{\vec{u} \in \mathcal{N}} I(\vec{u}), \quad \mathcal{N} = \{\vec{u} \in \mathcal{H} \mid I'(\vec{u})(u_1, 0) = I'(\vec{u})(0, u_2) = 0, \quad u_1 \neq 0, \quad u_2 \neq 0\}. \quad (2)$$

実際 a が正の定数のときは [1, Theorem 1] より (1) は基底状態をもたない. 斥力的なとき b が達成されない原因は, 埋め込み $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^4(\mathbb{R}^N)$ の非コンパクト性にある. そのため, $N = 2, 3$ のときは球対称関数に制限した最小化問題を考えると, 埋め込み $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \subset L^4(\mathbb{R}^N)$ のコンパクト性から最小点が存在し, その最小点は (1) の解となることがわかる [3, Theorem 1.1].

この講演では球対称関数ではなく偶関数に制限した最小化問題を考えても最小点が存在し得ることを示す. $\mathcal{H}$ の偶関数全体を $\mathcal{H}_{\text{even}} = \{\vec{u} \in \mathcal{H} \mid \vec{u}(-x) = \vec{u}(x)\}$ とおく. 次の最小化問題を考える.

$$b_{\text{even}} = \inf_{\vec{u} \in \mathcal{N}_{\text{even}}} I(\vec{u}), \quad \mathcal{N}_{\text{even}} = \mathcal{N} \cap \mathcal{H}_{\text{even}} \quad (3)$$

最小化問題 (3) を達成する (1) の正值解を偶対称基底状態と呼ぶことにする. 偶対称基底状態の存在に関して次の定理 1 と定理 2 が成立する.

定理 1 ([2]). $N = 2, 3$ とし (a.1)–(a.3), $\lambda_1 < \lambda_2$ かつ

$$\frac{\lambda_1^{2-\frac{N}{2}}}{\mu_1} \leq \frac{\lambda_2^{2-\frac{N}{2}}}{\mu_2}. \quad (4)$$

を仮定する. このとき b_{even} は達成される. すなわち (1) は偶対称基底状態をもつ.

注意 1. a が正の定数のとき, 定理 1 の偶対称基底状態の非球対称性は分らない. したがって a が正の定数のとき (1) の偶対称基底状態は球対称関数かもしれない.

定理 1 の証明で用いる手法は $N = 1$ のときも適用できる. ただし $N = 1$ のときは, さらに仮定を加える必要がある.

$$-\Delta u + \lambda_i u = \mu_i u^3 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (5)$$

の球対称な基底状態を $\omega_i(x)$ とする. ここで (5) の基底状態とは

$$c_i = \frac{1}{4} \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_{\lambda_i}^4}{\mu_i \|u\|_{L^4}^4}$$

を達成する (5) の正值解のことをいう.

定理 2 ([2]). $N = 1$ とし (a.1)–(a.3), $\lambda_1 < \lambda_2$ かつ (4) を仮定する. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) \omega_2(x)^2 (\cosh \sqrt{\lambda_1} x)^2 dx < \sqrt{\lambda_1} \quad (6)$$

または

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) \omega_2(x)^2 e^{2\sqrt{\lambda_1}|x|} dx < 2\sqrt{\lambda_1} \quad (7)$$

のどちらかが成り立つならば b_{even} は達成される. すなわち (1) は偶対称基底状態をもつ.

注意 2. 2つの不等式 (6) と (7) の間には優劣はない. 実際, 次のように $2(\cosh \sqrt{\lambda_1} x)^2$ と $e^{2\sqrt{\lambda_1}|x|}$ の大小関係は逆転する.

$$\begin{aligned} 2(\cosh \sqrt{\lambda_1} x)^2 &> e^{2\sqrt{\lambda_1}|x|} & (2\sqrt{\lambda_1}|x| < \log(1 + \sqrt{2}) \text{ のとき}) \\ 2(\cosh \sqrt{\lambda_1} x)^2 &\leq e^{2\sqrt{\lambda_1}|x|} & (2\sqrt{\lambda_1}|x| \geq \log(1 + \sqrt{2}) \text{ のとき}) \end{aligned}$$

定理 1–2 は次の補題 1, 命題 1, 命題 2 から従う.

補題 1. $N \leq 3$ とし (4) を仮定する. このとき $c_1 \leq c_2$ が成立する.

命題 1. (i) $N = 2, 3$ とし $\lambda_1 < \lambda_2$ を仮定する. このとき $b_{\text{even}} < 2c_1 + c_2$ が成立する.

(ii) $N = 1$ とし $\lambda_1 < \lambda_2$ を仮定する. さらに (6) または (7) のどちらかが成り立つならば $b_{\text{even}} < 2c_1 + c_2$ が成立する.

命題 2. $N \leq 3$ とする. $c_1 \leq c_2$ かつ $b_{\text{even}} < 2c_1 + c_2$ が成り立つとき, b_{even} は達成される.

補題 1 は容易にわかる. 命題 2 は comcentartion compactness の議論によって偶対称 Palais-Smale 列を分類することによりわかる. したがって不等式 $b_{\text{even}} < 2c_1 + c_2$ を示すことが定理の証明の鍵となる. 大雑把なこの不等式を導く概略を述べる. $N = 2, 3$ のときは $y \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$\omega_1[y](x) = \omega_1(x - y) + \omega_1(-x - y) \quad (x \in \mathbb{R}^N) \quad (8)$$

とおき (3) の (u_1, u_2) に $(\omega_1[y], \omega_2)$ を $\mathcal{N}_{\text{even}}$ に射影した関数 $(t_1\omega_1[y], t_2\omega_2) \in \mathcal{N}_{\text{even}}$ を代入する. このとき

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} I(t_1\omega_1[y], t_2\omega_2) = 2c_1 + c_2 \quad (9)$$

であることはすぐわかる. この (9) の収束の評価を精密に行い, $|y| \rightarrow \infty$ のとき $2c_1 + c_2$ に上から近づいているのか, 下から近づいているのかを考察する. 実際

$$\begin{aligned} I(t_1\omega_1[y], t_2\omega_2) &= 2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) (\omega_1(x - y) + \omega_1(x + y))^2 \omega_2(x)^2 dx \\ &\quad - 2\mu_1 \int_{\mathbb{R}^N} \omega_1(x - y) \omega_1(x + y)^3 dx + (\text{残余項}) \end{aligned}$$

となっていることがわかる. また基底状態 ω_i の無限遠での減衰レートはよく知られており

$$\omega_i(y) \sim |y|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\sqrt{\lambda_i}|y|} \quad (|y| \rightarrow \infty)$$

であることに注意する. 2つの基底状態 $\omega_1(\cdot - y)$ と $\omega_1(\cdot + y)$ の相互作用 $\int_{\mathbb{R}^N} \omega_1(x - y) \omega_1(x + y)^3 dx$ は汎関数の値を $2c_1 + c_2$ より減衰させる. その減衰レートは $|y| \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega_1(x - y) \omega_1(x + y)^3 dx \sim |y|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-2\sqrt{\lambda_1}|y|} \quad (|y| \rightarrow \infty) \quad (10)$$

であることがわかる. 他方, $\lambda_1 < \lambda_2$ のとき, 斥力項 $\int_{\mathbb{R}^N} a(x) \omega_1[y]^2 \omega_2^2 dx$ は汎関数の値を増大させる. その増大レートは $|y| \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) (\omega_1(x - y) + \omega_1(x + y))^2 \omega_2(x)^2 dx \sim |y|^{-(N-1)} e^{-2\sqrt{\lambda_1}|y|} \quad (|y| \rightarrow \infty) \quad (11)$$

となる. $N = 2, 3$ のときは, 多項式レートの違いから $b_{\text{even}} < 2c_1 + c_2$ が導かれる. $N = 1$ のときは (10) と (11) のレートが同じになるので (10) と (11) の係数の大小関係が必要となる. $(\omega_1[y], \omega_2)$ をテスト関数としたときの係数の大小関係を保証する条件が (6) である. また $y \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$\omega_1\langle y \rangle(x) = \max\{\omega_1(x - y), \omega_1(-x - y)\} \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

とおき $(\omega_1\langle y \rangle, \omega_2)$ をテスト関数として用いたときの係数の大小関係を保証する条件が (7) である.

参考文献

- [1] T.-C. Lin and J. Wei, *Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$* , Comm. Math. Phys. **255** (2005), no. 3, 629–653.
- [2] Y. Sato, *Even ground state for nonlinear Schrödinger systems with repulsive interaction*, Nonlinear Anal. **234** (2023), Paper No. 113302.
- [3] B. Sirakov, *Least energy solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$* , Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 1, 199–221.