

非線形シュレディンガー方程式系の解の長時間挙動について

瀬片 純市 (九州大学大学院数理学研究院) *

1. アブストラクト

本講演では、以下のような空間 1 次元でゲージ不変な 3 次の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式系の解の長時間挙動について考える：

$$(1.1) \quad \begin{cases} i\partial_t u_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 = N_1(u_1, u_2), & t, x \in \mathbb{R}, \\ i\partial_t u_2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 = N_2(u_1, u_2), & t, x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ここに、 $u_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2$) とし、非線形項は

$$\begin{aligned} N_1(u_1, u_2) &= c_1|u_1|^2 u_1 + c_2|u_1|^2 u_2 + c_3 u_1^2 \overline{u_2} + c_4 u_1 |u_2|^2 + c_5 \overline{u_1} u_2^2 + c_6 |u_2|^2 u_2, \\ N_2(u_1, u_2) &= c_7 |u_1|^2 u_1 + c_8 |u_1|^2 u_2 + c_9 u_1^2 \overline{u_2} + c_{10} u_1 |u_2|^2 + c_{11} \overline{u_1} u_2^2 + c_{12} |u_2|^2 u_2 \end{aligned}$$

で与えられているものとする。ここに、 c_j ($j = 1, \dots, 12$) は実定数である。

方程式系 (1.1) は、スピノル・ボース・アインシュタイン凝縮など、物理学のさまざまなモデルとして現れる。空間 1 次元で 3 次の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式 (系) は一般に非線形項が時間に関し可積分ではなく、非線形項の影響が長時間にわたり無視できない。方程式が単独の場合には Ozawa [7], Hayashi-Naumkin [1] により、小さな初期値に対する解の長時間挙動は、線形シュレディンガー方程式の解に非線形項による位相の修正を加えたものとして与えられることが知られている。一方、方程式がシステムの場合には、Li-Sunagawa [3], Katayama-Sakoda [2] などで非線形項に未知関数の微分を含む、より一般の非線形項に対し解の長時間挙動が調べられているが、(1.1) の解挙動に関してはまだ未解明な部分が多い。われわれは (1.1) の形の方程式系全体の集合を分類することで (1.1) の解の長時間挙動を調べることを試みる。

まず、(1.1) の形の方程式系全体が線形変換

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad M \in GL_2(\mathbb{R})$$

に関して閉じていることに着目する。すなわち、 (u_1, u_2) が方程式 (1.1) をみたすならば、(1.2) で定義される新しい未知関数 (v_1, v_2) がみたす方程式系も (1.1) の形になる (ただし、非線形項の係数は変化する)。そこで、変数変換 (1.2) で移りあう方程式系は同じものとみなすことで、(1.1) の形の方程式系全体の集合に同値関係を入れる。ここでは、(1.1) の形の方程式系全体をこの同値関係で割った商集合の特徴づけについて考える。

*本研究は、眞崎 聡 氏 (北海道大)、瓜屋 航太 氏 (岡山理科大) との共同研究に基づく。

商集合を調べるために, [5, 6] で導入された (1.1) の行列-ベクトル表示を導入する, すなわち,

$$C := \begin{pmatrix} c_2 - c_3 & -c_1 + c_8 - c_9 & -c_7 \\ c_5 & -c_3 + c_{11} & -c_9 \\ c_6 & -c_4 + c_5 + c_{12} & -c_{10} + c_{11} \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} c_8 - 2c_9 \\ \frac{1}{2}(-c_2 + 2c_3 - c_{10} + 2c_{11}) \\ c_4 - 2c_5 \end{pmatrix}$$

とおき, 方程式系 (1.1) を (C, V) に対応させる. 行列 C とベクトル V は (1.1) の保存則と深く関わっている. 例えば, (1.1) には L^2 型の保存量が $(3 - \text{rank } C)$ 個存在する. また, エネルギー型の保存量が存在するための必要十分条件を C と V により特徴づけることができる.

このような方程式のハミルトン構造は, 解の長時間挙動を調べる上でも非常に重要である. したがって, $\text{rank } C$ が大きいほど解の挙動を調べるのは難しくなると予想される. ここでは, $\text{rank } C = 1$ の場合の商集合の特徴づけについて考える. 本講演では簡単のため, $\text{tr } C = 0, V = 0$ の場合のみを考える[†].

$$Z_1 := \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr } C = 0, \text{rank } C = 1\}$$

とおく. $Z_1 / \sim$ について以下が成り立つ.

Theorem 1.1 ([6]). $Z_1 / \sim = T_+ \cup T_0 \cup T_-$, ここに,

$$T_+ := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$T_0 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad T_- := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで, 定理に現れた代表元ともとの方程式系 (1.1) との対応について触れておく.

- $C \in T_+$ のとき. 対応する (1.1) は, 分離した 2 本の方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 = \alpha|u_1|^2 u_1, \\ i\partial_t u_2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 = \beta|u_2|^2 u_2, \end{cases}$$

(α, β はある実数) となり, 上で述べたようにこの方程式系の解の長時間挙動は [1, 7] で得られている.

[†] $\text{tr } C = 0, V = 0$ とは限らない, より一般の場合の $\text{rank } C = 1$ の商集合の特徴づけについては [6, Theorem A.13] を参照.

- $C \in T_0$ のとき. 対応する (1.1) は以下ようになる.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i\partial_t u_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 = 0, \\ i\partial_t u_2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 = -|u_1|^2 u_1, \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i\partial_t u_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 = \mp |u_1|^2 u_1, \\ i\partial_t u_2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 = \mp (2|u_1|^2 u_2 + u_1^2 \bar{u}_2). \end{cases}$$

前者については, Sunagawa [8] により, 後者については [6] により解の挙動が調べられており, ともに $u_2(t) = O(t^{-1/2} \log t)$ in L^∞ as $t \rightarrow \infty$ となることが知られている. ただし, 前者と後者で解の漸近形は少し異なる.

- $C \in T_-$ のとき. 対応する (1.1) は

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 = -|u_1|^2 u_1 + 2u_1 |u_2|^2 + \bar{u}_1 u_2^2, \\ i\partial_t u_2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 = -2|u_1|^2 u_2 - u_1^2 \bar{u}_2 + |u_2|^2 u_2 \end{cases}$$

となるが, この場合の解の長時間挙動はよくわかっていない.

Remark 1.2. rank $C = 2$ の場合の商集合の特徴づけについては, 最近 Masaki [4] により得られた.

REFERENCES

- [1] Nakao Hayashi and Pavel I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.
- [2] Soichiro Katayama and Daisuke Sakoda, *Asymptotic behavior for a class of derivative nonlinear Schrödinger systems*, Partial Differ. Equ. Appl. **1** (2020), no.3, Paper No. 12.
- [3] Chunhua Li and Hideaki Sunagawa, *On Schrödinger systems with cubic dissipative nonlinearities of derivative type*, Nonlinearity **29** (2016), 1537–1563.
- [4] Satoshi Masaki, *Classification of a class of systems of cubic ordinary differential equations*, Journal of Differential Equations **344** (2023) 471–508.
- [5] Satoshi Masaki, Jun-ichi Segata, and Kota Uriya, *On asymptotic behavior of solutions to cubic nonlinear Klein-Gordon systems in one space dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **9** (2022), 517–563.
- [6] Satoshi Masaki, Jun-ichi Segata, and Kota Uriya, *Asymptotic behavior in time of solution to system of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, arXiv:2112.06427, To appear in Proceedings of the workshop "Mathematical Physics and its Interactions" Proceedings in Mathematics & Statistics series by Springer.
- [7] Tohru Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.
- [8] Hideaki Sunagawa, *Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems*, Osaka J. Math. **42** (2005), 65–83.