BOUNDEDNESS OF BILINEAR PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS WITH $S_{0,0}$ CLASS SYMBOLS ON BESOV SPACES

至田　直人 (名古屋大学)

1. アブストラクト

$\sigma = \sigma(x, \xi_1, \xi_2) \in L^\infty((\mathbb{R}^n)^3)$ に対して，双線形擬微分作用素を次で定義する．

$$T_\sigma(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{ix\cdot(\xi_1+\xi_2)} \sigma(x, \xi_1, \xi_2) \widehat{f_1}(\xi_1) \widehat{f_2}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

ここで，$f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f_j}$ は f_j のフーリエ変換を表わす．

双線形の Hörmander クラス $BS^m_{0,0}$ とは $\sigma(x, \xi_1, \xi_2) \in C^\infty((\mathbb{R}^n)^3)$ であって，全ての $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}^n_0$ に対して

$$\left|\partial^\alpha_x \partial^{\beta_1}_{\xi_1} \partial^{\beta_2}_{\xi_2} \sigma(x, \xi_1, \xi_2)\right| \le C_{\alpha,\beta_1,\beta_2}(1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^m$$

を満たすもの全体のことを表わす．

Bényi-Torres [2] では，$1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ なる $1 \le p_1, p_2, p < \infty$ に対して，$\sigma \in BS^0_{0,0}$ であって対応する双線形擬微分作用素が $L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^p$ 有界とはならないものが存在することを示した．線形の擬微分作用素に対する Calderón-Vaillancourt の定理（[3]）から，シンボルクラス $BS^0_{0,0}$ は $L^2 \times L^2 \to L^1$ 有界性を保証することが自然に期待されるが，Bényi-Torres [2] からこのような素朴な一般化は成立しないことがわかる．その後，[1] や [5] を経て，Miyachi-Tomita [6], Kato-Miyachi-Tomita [4] によって次が示された．

Theorem A ([6, 4])**.** *$0 < p_1, p_2, p \le \infty$, $1/p \le 1/p_1 + 1/p_2$, $m \in \mathbb{R}$ とする．このとき，*

$$\mathrm{Op}(BS^m_{0,0}) \subset B(h^{p_1} \times h^{p_2} \to h^p)$$

が成り立つための必要十分条件は

$$m \le \min\left\{\frac{n}{p}, \frac{n}{2}\right\} - \max\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{2}\right\} - \max\left\{\frac{n}{p_2}, \frac{n}{2}\right\}$$

である．ただし，$p_j = \infty$ のときは，h^{p_j} を bmo に置き換えられる．

h^p は 局所ハーディー空間，bmo は 局所 BMO 空間である．$1 < p \le \infty$ のとき，$h^p = L^p$ であり，$h^1 \hookrightarrow L^1$，$L^\infty \hookrightarrow bmo$ であることが知られている．

最近，Theorem A のソボレフ空間の枠組みへの一般化が与えられた．

Theorem B ([7])**.** *$0 < p_1, p_2, p \le \infty$, $1/p \le 1/p_1 + 1/p_2$, $s_1, s_2, s \in \mathbb{R}$,*

$$m = \min\left\{\frac{n}{p}, \frac{n}{2}\right\} - \max\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{2}\right\} - \max\left\{\frac{n}{p_2}, \frac{n}{2}\right\} + s_1 + s_2 - s.$$

とする．このとき，

$$s_1 < \max\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{2}\right\}, \quad s_2 < \max\left\{\frac{n}{p_2}, \frac{n}{2}\right\}, \quad s > -\max\left\{\frac{n}{p'}, \frac{n}{2}\right\}$$

ならば

$$\mathrm{Op}(BS^m_{0,0}) \subset B(h^{p_1}_{s_1} \times h^{p_2}_{s_2} \to h^p_s). \tag{1.1}$$

が成り立つ．ただし，$p_j = \infty$ または $p = \infty$ の場合には $h^{p_j}_{s_j}$ は bmo_{s_j} に，h^p_s は bmo_s に置き換える．

ここで，h^p_s と bmo_s はそれぞれ h^p，bmo に基づく（非斉次）Sobolev 空間である．

本講演では更なる一般化として，シンボルが双線形 Hörmander クラス $BS^m_{0,0}$ に属する場合の Besov 空間上での有界性を考察する．

Definition (Besov 空間). $0 < p, q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．Besov 空間は以下で定義する：

$$B^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{B^s_{p,q}} = \left\| \{2^{js} \|\psi_j(D) f\|_{L^p}\}_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q_j(\mathbb{N}_0)} < \infty \right\}.$$

主結果は以下のとおりである．

Theorem 1. *$0 < p_1, p_2, p \le \infty$, $1/p \le 1/p_1 + 1/p_2$, $0 < q_1, q_2, q \le \infty$, $1/q = 1/q_1 + 1/q_2$, $s_1, s_2, s \in \mathbb{R}$ and*

$$m = \min\left\{\frac{n}{p}, \frac{n}{2}\right\} - \max\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{2}\right\} - \max\left\{\frac{n}{p_2}, \frac{n}{2}\right\} + s_1 + s_2 - s.$$

とする．このとき，

$$s_1 < \max\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{2}\right\}, \quad s_2 < \max\left\{\frac{n}{p_2}, \frac{n}{2}\right\}, \quad s > -\max\left\{\frac{n}{p'}, \frac{n}{2}\right\}$$

ならば

$$\mathrm{Op}(BS^m_{0,0}) \subset B(B^{s_1}_{p_1,q_1} \times B^{s_2}_{p_2,q_2} \to B^s_{p,q}). \tag{1.2}$$

Theorem A，Theorem B と主結果との関係や Theorem 1 の仮定の最適性についても紹介する．

References

[1] Á. Bényi, F. Bernicot, D. Maldonado, V. Naibo and R. H. Torres, On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators II, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), 1733–1764.

[2] Á. Bényi and R. H. Torres, Almost orthogonality and a class of bounded bilinear pseudodifferential operators, Math. Res. Lett. **11** (2004), 1–11.

[3] A. P. Calderón and R. Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **69** (1972), 1185–1187.

[4] T. Kato, A. Miyachi and N. Tomita, Boundedness of multilinear pseudo-differential operators with symbols in the Hörmander class $S_{0,0}$, J. Funct. Anal. **282** (2022), no. 4, Paper No. 109329, 28 pp.

[5] N. Michalowski, D. Rule and W. Staubach, Multilinear pseudodifferential operators beyond Calderón-Zygmund theory, J. Math. Anal. Appl. **414** (2014), 149–165.

[6] A. Miyachi and N. Tomita, Calderón-Vaillancourt-type theorem for bilinear operators, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), 1165–1201.

[7] N. Shida, Boundedness of bilinear pseudo-differential operators with $BS^m 0, 0$ symbols on Sobolev spaces, Math. Nachr., to appear.