ハイパーグラフラプラシアンを主要項とする非線型多価常微分方程式について *

内田　俊 (大分大学)

E-mail: shunuchida@oita-u.ac.jp

1　序

ハイパーグラフとは,

- 有限集合 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$: 頂点 (vertex) 集合
- V の部分集合族 $E \subset 2^V$, 但し各 $e \in E$ は 2 元以上の要素を含む : ハイパー辺 (hyperedge) の集合
- E 上の正値関数 $w : E \to (0, \infty)$: 各ハイパー辺の重み

の 3 つ組 $G = (V, E, w)$ として定義される．これは各 $v_1, \ldots, v_n \in V$ が $e \in E$ で表される「グループ」により接続されたネットワーク構造を記述すると解釈できる（Figure 1 参照）．以下簡単のために，ハイパーグラフは連結であると仮定する : 任意の $u, v \in V$ に対しある $u_1, \ldots u_{N-1} \in V$ 及び $e_1, e_2, \ldots e_N \in E$ が存在, $u_{j-1}, u_j \in e_j$ $(\forall j = 1, 2, \ldots, N)$ を満たすとする（但し $u_0 = u, u_N = v$）．本講演ではハイパーグラフで記述されるネットワークの構造解析を目的として吉田悠一氏 [1] により提唱された,「ハイパーグラフラプラシアン」と呼ばれる非線型作用素の定義と基本的な性質，及びこれを主要項とする発展方程式について得られた結果を紹介する．

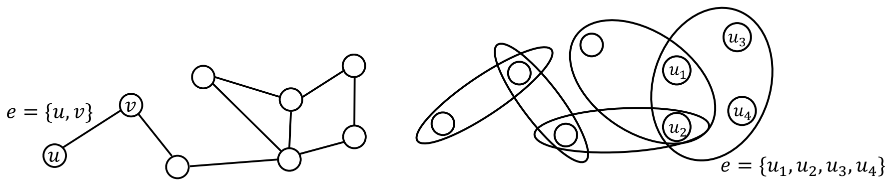

Figure 1　$e \in E$ が 2 元集合であるとき $e = \{u, v\}$ は 2 点 $u, v \in V$ を結ぶ線分を表すと解釈できる．そのため E が 2 元集合のみからなるならば，G は点と線分からなるネットワーク構造を表す（左図，ハイパーグラフに対し通常のグラフ (usual graph) と呼ばれる）．これに対しハイパーグラフでは $\#e \geq 3$ となる $e \in E$ が許され，これは複数の点の接続・交流・グループ化を表すと解釈される（右図）．

---

* 池田正弘氏（慶應義塾大学/理化学研究所）との共同研究に基づく．

2 ハイパーグラフラプラシアンの定義

以下 $\mathbb{R}^V$ は V から $\mathbb{R}$ への写像 $x : V \to \mathbb{R}$ 全体の集合とする．V は有限集合であるため，$x_i := x(v_i)$, $x \sim (x_1, \ldots, x_n)$ の対応により $\mathbb{R}^V$ は $n = \#V$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる．従って $\mathbb{R}^V$ は $x \cdot y := \sum_{v \in V} x(v)y(v)$，$\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ を内積及びノルムとするヒルベルト空間となる．以下記法として，$\mathbf{1}_{v_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$，$\mathbf{1}_V \in \mathbb{R}^V$ はそれぞれ

$$\mathbf{1}_{v_i}(v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v = v_i \\ 0 & \text{if } v \neq v_i \end{cases} \qquad \mathbf{1}_V(v) := 1 \quad \forall v \in V$$

なる $\mathbb{R}^V$ の元とする．これらはそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の第 i 基本ベクトル，及び $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ と同一視される．

ここで $\mathbb{R}^V$ 上の実数値連続凸関数として，各 $e \in E$ に対し

$$f_e(x) := \max_{u,v \in e}(x(u) - x(v)) = \max_{u,v \in e}|x(u) - x(v)|$$

を定義する．劣微分の maximum rule ([2, Proposition 2.54] 等を参照) から，f_e の劣勾配は次のようになる：

$$\partial f_e(x) = \operatorname*{arg\,max}_{b \in B_e} b \cdot x = \left\{ b_e \in B_e; \quad b_e \cdot x = \max_{b \in B_e} b \cdot x \right\}$$
$$B_e := \operatorname{conv}\{\mathbf{1}_u - \mathbf{1}_v;\ u, v \in e\}.$$

ハイパーグラフ (p-) ラプラシアン $L_{G,p} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}^V}$ は，$\mathbb{R}^V$ 上の実数値連続凸関数

$$\varphi_{G,p}(x) := \frac{1}{p} \sum_{e \in E} w(e)(f_e(x))^p$$

の劣微分作用素として定義される．劣微分の連鎖律から

$$\begin{aligned} L_{G,p}(x) := \partial\varphi_{G,p}(x) &= \sum_{e \in E} w(e)(f_e(x))^{p-1} \partial f_e(x) \\ &= \left\{ \sum_{e \in E} w(e)(f_e(x))^{p-1} b_e; \quad b_e \in \operatorname*{arg\,max}_{b \in B_e} b \cdot x \right\} \end{aligned}$$

と表現できる．ここで指数は $1 \leq p < \infty$ とする．定義から $b_e \in \partial f_e(x)$ ならば $b_e \cdot x = \max_{b \in B_e} b \cdot x = f_e(x)$ であるため，任意の $y \in L_{G,p}(x)$ に対し $x \cdot y = p\varphi_{G,p}(x)$ が成立することに注意する．

Remark 1. 全ての $e \in E$ が 2 元集合（つまり G が通常のグラフ）である場合，$e = \{v_i, v_j\}$ とすると $f_e(x) = |x(v_i) - x(v_j)| = |x_i - x_j|$ となる．従って

$$\varphi_{G,p}(x) = \frac{1}{p} \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w(\{v_i, v_j\})|x_i - x_j|^p,$$

となり，これは $p = 1$ を除き n 変数関数として連続微分可能である．即ち G が点と線分からなるネットワークである場合，$L_{G,p}$ は一価作用素となり，特に $p = 2$ のとき $L_{G,p}$ は行列となる（古典的なグラフラプラシアンと一致する）．一方 G がハイパーグラフである場合，$\#e \geq 3$ となる $e \in E$ について ∂f_e が多価となるため，$L_{G,p}(x)$ は（$p = 2$ であっても）非線型多価作用素となる．

3 主結果

ハイパーグラフラプラシアン $L_{G,p}$ を主要項とする発展方程式（$\dim \mathbb{R}^V = n$ より ODE）の初期値問題

$$\begin{cases} x'(t) + L_{G,p}(x(t)) \ni 0 & t \in (0,\infty), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

について考察する．$L_{G,p}$ は劣微分として定義されるため，(1) が一意的大域解 $x \in W^{1,\infty}(0,\infty;\mathbb{R}^V)$ を持つことはブレジス-高村理論から保証できる．一方 $L_{G,p}$ の構造の複雑さ（非線型性，多価性，接続 $e \in E$ が明示的ではない等）から抽象理論により導かれる結果以外の解の性質については詳細に調べられていなかった．

ここで $x \in \mathbb{R}^V$ の「平均値 $\overline{x} \in \mathbb{R}^V$」を次で定義する：

$$\overline{x} := \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} x(v) \right) \mathbf{1}_V = \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} x(v) \right) (1, \ldots, 1).$$

これに対し我々は次の不等式を導いた：

Theorem 1 ([3])**.** $p \geq 1$ とする．このとき $p, \min_{e \in E} w(e), n$ のみに依存する定数 $\gamma_{G,p}, \Gamma_{G,p} > 0$ が存在し，

$$p\gamma_{G,p}\varphi_{G,p}(x) \leq \|x - \overline{x}\|^p \leq p\Gamma_{G,p}\varphi_{G,p}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^V. \tag{2}$$

またこの不等式を用いることで，(1) の解が初期値の平均に漸近することが示された：

Theorem 2 ([3])**.** 初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^V$ に対する (1) の解を x とする．このとき $X(t) := \|x(t) - \overline{x_0}\|$ について

$$\begin{aligned} \left(X(0)^{\frac{2-p}{2}} - \frac{(2-p)t}{\gamma_{G,p}} \right)_+^{1/(2-p)} &\leq X(t) \leq \left(X(0)^{\frac{2-p}{2}} - \frac{(2-p)t}{\Gamma_{G,p}} \right)_+^{1/(2-p)} && \text{if } 1 \leq p < 2, \\ X(0) \exp\left(-\frac{t}{\gamma_{G,p}} \right) &\leq X(t) \leq X(0) \exp\left(-\frac{t}{\Gamma_{G,p}} \right) && \text{if } p = 2, \\ \left(X(0)^{-\frac{p-2}{2}} + \frac{(p-2)t}{\gamma_{G,p}} \right)^{-1/(p-2)} &\leq X(t) \leq \left(X(0)^{-\frac{p-2}{2}} + \frac{(p-2)t}{\Gamma_{G,p}} \right)^{-1/(p-2)} && \text{if } p > 2, \end{aligned}$$

が成立する．ここで $(s)_+ := \max\{s, 0\}$ であり，$\gamma_{G,p}, \Gamma_{G,p}$ は定理 1 における定数である．

時間に余裕があれば最近の結果（池田正弘氏，深尾武史氏（龍谷大学）との共同研究 [4]）として，複数の頂点での値が既知関数で与えられた場合（ネットワーク内部から系を制御）について得られた結果も紹介する．

References

[1] Y. Yoshida, Cheeger inequalities for submodular transformations, Proc. 2019 Annu. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA) (2019), 2582–2601.

[2] B. S. Mordukhovich; N. M. Nam, *An Easy Path to Convex Analysis and Applications*, Morgan and Claypool Publishers, Williston, VT, 2014.

[3] M. Ikeda; S. Uchida, Nonlinear evolution equation associated with hypergraph Laplacian, Math. Meth. Appl. Sci 46(8) (2023), 9463–9476.

[4] T. Fukao; M. Ikeda; S. Uchida, Heat equation on the hypergraph containing vertices with given data, preprint, arXiv:2212.05446.