

デルタポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の 閾値における大域ダイナミクス

成亥隆恭（大阪大学理学研究科）*

1 導入

本講演では以下のデルタポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式について考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + \gamma \delta u + |u|^{p-1}u = 0, & (t, x) \in I \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (\delta\text{NLS})$$

ここで、 γ は実定数で、 δu は原点に質量を持つデルタポテンシャルを表し、 $p > 1$ とする。本講演では $\gamma < 0$ 、つまりデルタポテンシャルが反発的な場合のみを扱う。また $p > 5$ 、つまり非線形項は質量超臨界とする。このとき、方程式 (δNLS) はソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R})$ で時間局所適切であり、以下のエネルギー E_γ と質量 M を保存する。

$$\begin{aligned} E_\gamma(u(t)) &:= \frac{1}{2} \|u'(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2} |u(t, 0)|^2 - \frac{1}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\ M(u(t)) &:= \|u(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

ここで f' は f の空間微分を表すものとする。

$\omega > 0$ とし、一般的な関数と偶関数に関する以下の最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} n_{\omega, \gamma} &:= \inf \{ S_{\omega, \gamma}(f) : f \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, K_\gamma(f) = 0 \}, \\ r_{\omega, \gamma} &:= \inf \{ S_{\omega, \gamma}(f) : f \in H_{\text{even}}^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, K_\gamma(f) = 0 \}. \end{aligned}$$

ここで $S_{\omega, \gamma}$ と K_γ はそれぞれ作用汎関数とヴィリアル汎関数で、以下のように定める。

$$\begin{aligned} S_{\omega, \gamma}(f) &:= E_\gamma(f) + \frac{\omega}{2} M(f), \\ K_\gamma(f) &:= \|u'(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2} |u(t, 0)|^2 - \frac{p-1}{2(p+1)} \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

このとき、上の2つの最小化問題に対して、以下が成り立つ。

命題 1 ([2, 7]). $\gamma < 0, \omega > 0$ とする。

- (1) $n_{\omega, \gamma} = n_{\omega, 0}$ で、 $n_{\omega, \gamma}$ は達成されない¹。
- (2) $r_{\omega, \gamma}$ は以下を満たす。

$$n_{\omega, 0} < r_{\omega, \gamma} = \begin{cases} 2n_{\omega, 0}, & (0 < \omega \leq \frac{\gamma^2}{4}), \\ S_{\omega, \gamma}(Q_{\omega, \gamma}) < 2n_{\omega, 0}, & (\omega > \frac{\gamma^2}{4}). \end{cases}$$

さらに $0 < \omega \leq \gamma^2/4$ のときは $r_{\omega, \gamma}$ は達成されず、 $\omega > \gamma^2/4$ のときは偶関数 $Q_{\omega, \gamma}$ によって達成される。ここで、 $Q_{\omega, \gamma}$ は

$$Q_{\omega, \gamma}(x) := \{2(p+1)\}^{\frac{1}{p-1}} \omega^{\frac{1}{p-1}} \left[2 \cosh \left\{ \frac{p-1}{2} \sqrt{\omega} |x| + \tanh^{-1} \left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\omega}} \right) \right\} \right]^{-\frac{2}{p-1}}$$

で、これは以下の楕円型方程式の一意な正值解である。

$$-Q_{\omega, \gamma}'' - \gamma \delta Q_{\omega, \gamma} + \omega Q_{\omega, \gamma} = Q_{\omega, \gamma}^p.$$

*本講演は Stephen Gustafson 教授 (University of British Columbia) との共同研究に基づく。この研究は日本学術振興会の海外特別研究員制度の支援を受けたものである。

¹ $\gamma = 0$ のときの最小化問題 $n_{\omega, 0}, r_{\omega, 0}$ は $Q_{\omega, 0}$ によって達成される。つまり $n_{\omega, 0} = r_{\omega, 0} = S_{\omega, 0}(Q_{\omega, 0})$ である。

$H^1(\mathbb{R})$ の部分集合 $PW_{\omega,\gamma}, PW_{\omega,\gamma}^{\text{even}}$ を

$$PW_{\omega,\gamma} := \{f \in H^1(\mathbb{R}) : S_{\omega,\gamma}(f) < n_{\omega,\gamma}\},$$

$$PW_{\omega,\gamma}^{\text{even}} := \{f \in H_{\text{even}}^1(\mathbb{R}) : S_{\omega,\gamma}(f) < r_{\omega,\gamma}\},$$

と定める。これらの集合は最小化問題未満を考えている。 $S_{\omega,\gamma}(f) = n_{\omega,\gamma}$ は (M, E_γ) -平面における ω をパラメータとする直線群を与えるため、その包絡線を求めることで、 $\bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma}$ はより具体的に表すことが可能である。実際、 $s_c := 1/2 - 1/(p-1)$ とおいたとき、

$$\bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma} = \{f \in H^1(\mathbb{R}) : E_\gamma(f)M(f)^{\frac{1-s_c}{s_c}} < E_0(Q_{1,0})M(Q_{1,0})^{\frac{1-s_c}{s_c}}\}$$

と表せられる²。

このとき、最小化問題未満の解の大域ダイナミクスについて以下の結果が知られていた。

定理 2 ([7]). $u_0 \in \bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma}$ か $u_0 \in \bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma}^{\text{even}}$ のいずれかを仮定する。このとき、以下が成り立つ。

- (1) $K_\gamma(u_0) \geq 0$ ならば解は時間両方向で散乱する。
- (2) $K_\gamma(u_0) < 0$ ならば解は時間両方向において爆発する。

注意 3. • 解が時間正方向で散乱するとは、 $\|u(t) - e^{it\partial_x^2} u_+\|_{H^1} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) となる $u_+ \in H^1(\mathbb{R})$ が存在することをいう (cf. [9]). 負方向も同様に定める。

- 解が時間正方向で爆発するとは、正方向の最大存在時刻を T_+ としたとき $\lim_{t \rightarrow T_+} \|u'(t)\|_{L^2} = \infty$ となることをいう。
- $n_{\omega,\gamma} < r_{\omega,\gamma}$ であったので、 $\bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma} \cap H_{\text{even}}^1(\mathbb{R}) \subsetneq \bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma}^{\text{even}}$ となることに注意。

最小化問題未満での解のダイナミクスがわかったので、次に興味があるのは最小化問題ちょうどの閾値の場合である。

一般解に対する閾値においては以下が成り立つことがわかっている。

定理 4 ([1],[8]). $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が

$$E_\gamma(u_0)M(u_0)^{\frac{1-s_c}{s_c}} = E_0(Q_{1,0})M(Q_{1,0})^{\frac{1-s_c}{s_c}}$$

を満たすとする。このとき、以下が成り立つ。

- (1) $K_\gamma(u_0) > 0$, ならば 解は時間両方向に散乱する。
- (2) $K_\gamma(u_0) < 0$ かつ $xu_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ならば、解は時間両方向において有限時間で爆発する。

本研究では偶関数解の閾値における解の大域ダイナミクスについて研究を行い、以下の結果を得た。

2 主結果

$\omega > \gamma^2/4$ の場合と $0 < \omega \leq \gamma^2/4$ の場合とでは、解の大域ダイナミクスが以下のように変わる。

2.1 $\omega > \gamma^2/4$ の場合

定理 5 ([4]). $\omega > \gamma^2/4$ とする。このとき、以下を満たす偶関数解 $U^\pm$ が存在する。

- $M(U^\pm) = M(Q_{\omega,\gamma})$, $E_\gamma(U^\pm) = E_\gamma(Q_{\omega,\gamma})$ である。
- 少なくとも $[0, \infty)$ 上において $U^\pm$ は存在し、さらに或る $c > 0$ が存在して

$$\|U^\pm(t) - e^{i\omega t} Q_{\omega,\gamma}\|_{H^1} \lesssim e^{-ct} \quad (t \geq 0).$$

となる。

- $K_\gamma(U^+(0)) < 0$ であり、 U^+ は時間負方向において有限時間で爆発する。
- $K_\gamma(U^-(0)) > 0$ であり、 U^- 時間負方向において散乱する。

² $\bigcup_{\omega>0} PW_{\omega,\gamma}^{\text{even}}$ も同様にして直線群 $S_{\omega,\gamma}(f) = r_{\omega,\gamma}$ の包絡線を考えることで得られるが、こちらは明示的な形で表されるかどうかはわかっていない。

定理 6 ([4]). $\omega > \gamma^2/4$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が偶関数で

$$M(u_0) = M(Q_{\omega,\gamma}), \quad E_\gamma(u_0) = E_\gamma(Q_{\omega,\gamma}).$$

を満たすとする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $K_\gamma(u_0) > 0$ ならば解は時間両方向において散乱するか, もしくは (方程式の対称性を除いて) $u = U^-$ である.
- (2) $K_\gamma(u_0) = 0$ ならば (方程式の対称性を除いて) $u = e^{i\omega t} Q_{\omega,\gamma}$ である.
- (3) $K_\gamma(u_0) < 0$ かつ $xu_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ならば, 解は時間両方向において有限時間で爆発するか, もしくは (方程式の対称性を除いて) $u = U^+$ である.

2.2 $0 < \omega \leq \gamma^2/4$ の場合

定理 7 ([3]). $0 < \omega \leq \gamma^2/4$ とする. $u_0 \in H_{\text{even}}^1(\mathbb{R})$ が

$$M(u_0) = 2M(Q_{\omega,0}), \quad E_\gamma(u_0) = 2E(Q_{\omega,0})$$

を満たすとする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $K_\gamma(u_0) > 0$ ならば, 解は時間両方向に散乱する.
- (2) $K_\gamma(u_0) < 0$ かつ $xu_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ならば, 解は時間両方向において有限時間で爆発する.

2.3 主結果に関するコメント

- $\omega = 1$ と固定すると, $-2 < \gamma < 0$ か $\gamma \leq -2$ かで解のダイナミクスが変わることを意味してる. これは反発力が弱い場合 ($-2 < \gamma < 0$) には, 分散性と反発性を組み合わせた波を広げる力が非線形性の波を集約する力と釣り合っていて, 基底状態解 $Q_{1,\gamma}$ が存在し, 更にそれに漸近する解が現れる. 一方で, 反発力が強い場合 ($\gamma \leq -2$) には, 分散性と反発性を組み合わせたものが非線形性とちょうど釣り合うことがなく, 散乱か爆発のいずれかしか起こらないことを意味していると考えられる.
- Gustafson 氏 (UBC) と清水一慶氏 (大阪大学) との共同研究 [6] において, 多重ソリトン解の存在を示すこともできた. これから, 散乱か爆発の 2 分的な結果を得た閾値においては, それを超えたところでは非散乱な大域解 (1 ソリトン解または 2 ソリトン解) が存在することがわかる. これは散乱か爆発の 2 分的な結果を得るのは閾値が最適で, それ以上を考えると 2 分的な結果を得ることはできないことを意味している.
- Gustafson 氏 (UBC) との共同研究 [5] で, 対数速度で離れていく 2 ソリトン解の構成も行った.

References

- [1] A. H. Ardila and T. Inui, *Threshold scattering for the focusing NLS with a repulsive Dirac delta potential*, J. Differential Equations **313** (2022), 54–84.
- [2] R. Fukuizumi and L. Jeanjean, *Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 1, 121–136.
- [3] S. Gustafson and T. Inui, *Scattering and blow-up for the threshold even solutions to the nonlinear schrödinger equation with the repulsive delta potential at low frequencies*, preprint, arXiv:2310.08859.
- [4] S. Gustafson and T. Inui, *Threshold even solutions to the nonlinear schrödinger equation with delta potential at high frequencies*, preprint, arXiv:2211.15591.
- [5] S. Gustafson and T. Inui, *Two-solitons with logarithmic separation for 1D NLS with repulsive delta potential*, preprint, arXiv:2310.08865.
- [6] S. Gustafson, T. Inui, and I. Shimizu, *Multi-soliton for the nonlinear schrödinger equation with the repulsive dirac delta potential*, preprint, arXiv:2310.08862.
- [7] M. Ikeda and T. Inui, *Global dynamics below the standing waves for the focusing semilinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential*, Anal. PDE **10** (2017), no. 2, 481–512.
- [8] T. Inui, *Remark on blow-up of the threshold solutions to the nonlinear schrödinger equation with the repulsive dirac delta potential*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.
- [9] H. Mizutani, *Wave operators on Sobolev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 4, 1645–1652.