3次元消散型波動方程式の解の重み付き各点評価について *

喜多 航佑 (早稲田大学 理工学術院)

Abstract

本講演では次の空間 3 次元の消散型波動方程式の初期値問題について考える.

$$\text{(DW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = F(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ u(0,x)=u_0(x), \quad \partial_t u(0,x)=u_1(x), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

定数係数線形消散型波動方程式についてはその非線形問題への応用と共に様々な方面から既に数多くの研究が為されている. (例えば [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12]). ここでは, (DW) の解の重み付き評価について再考する. 以下では, $\langle\cdot\rangle = 1+|\cdot|$ とする.

波動方程式に関しては F. John の結果 [6] があり, そこでは次の波動方程式の解に対して時空重み付き L^∞-評価が考察されている.

$$\text{(W)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = F(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ w(0,x)=w_0(x), \quad \partial_t w(0,x)=w_1(x), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

実際 [6] では次の 2 つの評価を得ている: (i) 斉次 ($F\equiv 0$) とした (W) の解に対し

$$\langle t+|x|\rangle\langle t-|x|\rangle^{\kappa-2}\,|w(t,x)| \lesssim \|w_0\|_{\infty,\kappa-1} + \|\nabla w_0\|_{\infty,\kappa} + \|w_1\|_{\infty,\kappa}$$

が成り立つ. ここで, $\kappa>2$ であり,

$$\|f\|_{\infty,\kappa} := \|\langle\cdot\rangle^\kappa f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

である. (ii) デュハメル項 ($w_0=w_1=0$) の評価として $\kappa>2$, $\gamma>1$ に対し

$$\langle t+|x|\rangle\langle t-|x|\rangle^{\kappa-2}\,|w(t,x)| \lesssim \|\langle\tau+|y|\rangle^\kappa\langle\tau-|y|\rangle^\gamma F(\tau,y)\|_{L^\infty_{\tau,y}}.$$

これらの評価に現れる重みは波動特有のものであり, このタイプの評価を用いた非線形波動方程式への応用も多く知られている. 本講演では (DW) の解に対し得られた時空重み付き評価について, この様な評価を考察するに至ったモチベーションや今後の研究の展望も含めて解説する.

Theorem 1. (i) $F\equiv 0$ とする. このとき, $\kappa>3$ に対し,

$$\langle t+|x|^2\rangle^{\frac{3}{2}}|u(t,x)| \lesssim \|u_0\|_{\infty,\kappa} + \|\nabla u_0\|_{\infty,\kappa} + \|u_1\|_{\infty,\kappa}. \tag{1.1}$$

(ii) $u_0=u_1=0$ とする. このとき, $\kappa>\frac{5}{2}$ に対し

$$\langle t+|x|^2\rangle^{\frac{3}{2}}|u(t,x)| \lesssim \left\|\langle\tau+|y|^2\rangle^\kappa F(\tau,y)\right\|_{L^\infty_{\tau,y}} \tag{1.2}$$

また, $\kappa'>\frac{3}{2}$, $\gamma>1$ に対し

$$\langle t+|x|^2\rangle^{\frac{3}{2}}|u(t,x)| \lesssim \left\|\langle\tau+|y|^2\rangle^{\kappa'}\langle\tau-|y|\rangle^\gamma F(\tau,y)\right\|_{L^\infty_{\tau,y}} \tag{1.3}$$

Remark 1. Theorem 1 の評価 (1.1) 及び (1.2) を用いると, (DW) において $F=|u|^p$ とした非線形消散型波動方程式に対して $p>1+\frac{2}{3}$ (藤田優臨界) のときに小さな初期値に対して時間大域解の存在を示すことが出来る ([4, 10]). このことからも重みの指数は妥当であると考えられる. (cf. [9])

---

* 本講演はピサ大学の V. Georgiev 教授との共同研究に基づく.

References

[1] N. Hayashi; E. I. Kaikina; P. I. Naumkin, Damped wave equation with super critical nonlinearities, *Differential Integral Equations*, **17** (2004), no. 5-6, 637-652.

[2] M. Ikeda; T. Inui; M. Okamoto; Y. Wakasugi, L^p-L^q estimates for the damped wave equatioan and the critical exponent for the nonlinear problem with slowly decaying data, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **18** (2019), no. 4, 1967-2008.

[3] R. Ikehata; M. Ohta, Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl.*, **269** (2002), no. 1, 87-97.

[4] R. Ikehata; K. Tanizawa, Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in $\mathbf{R}^N$ with noncompactly supported initial data, *Nonlinear Anal.*, **61** (2005), no. 7, 1189-1208.

[5] T. Inui, The Strichartz estimates for the damped wave equation and the behavior of solutions for the energy critical nonlinear equation, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **26** (2019), no. 6, Paper No. 50, 30 pp.

[6] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.*, **28** (1979), no. 1-3, 235-268.

[7] T. Hosono; T. Ogawa, Large time behavior and L^p-L^q estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations, *J. Differential Equations*, **203** (2004), no. 1, 82-118.

[8] A. Matsumura, On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **12** (1976,1977), no. 1, 169-189.

[9] T. Narazaki; K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with slowly decaying data, *J. Math. Anal. Appl.*, **338** (2008), no. 2, 803-819.

[10] K. Nishihara, L^p-L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, *Math. Z.*, **244** (2003), no. 3, 631-649.

[11] M. Sobajima, Higher order asymptotic expansion of solutions to abstract linear hyperbolic equations, *Math. Ann.*, **380** (2021), no. 1-2, 1-19.

[12] G Todorova; B. Yordanov, Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping, *J. Differential Equations*, **174** (2001), no. 2, 464-489.