

2次元外部領域における半線形消散型 波動方程式の解の存在時間評価¹

側島 基宏 (東京理科大学・創域理工)*

1. Introduction

本講演では、2次元外部領域における半線形消散型波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = u^2 & \text{in } B^c \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \partial B \times (0, T), \\ u(0) = f, \partial_t u(0) = g & \text{in } B^c \end{cases} \quad (1)$$

を考える．ここで、 $B = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}$ であり、 f, g は既知とする．このとき、以下で定義される未知関数 u の解の最大存在時間の評価について考察する．

$$T_{\max}(f, g) := \sup\{T > 0; (1) \text{ は } (0, T) \text{ における弱解をもつ}\}.$$

N 次元全空間 $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) における半線形消散型波動方程式 ($\partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |u|^p$) については、 $1 < p \leq 1 + \frac{2}{N}$ のときの小さな初期値に対する解の爆発現象、 $1 + \frac{2}{N} < p (< p_*)$ のときの小さな大域解の存在がよく知られている．対応する解の存在時間評価についても以下のように整理されている： $0 \leq f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ に対して

$$T_{\max}(\varepsilon f, \varepsilon g) \approx \begin{cases} C\varepsilon^{-(\frac{1}{p-1} - \frac{2}{N})^{-1}} & \text{if } 1 < p < 1 + \frac{2}{N}, \\ \exp(C\varepsilon^{-\frac{2}{N}}) & \text{if } p = 1 + \frac{2}{N}, \end{cases} \quad (\varepsilon \ll 1)$$

(Matsumura [6], Lai-Zhou [5])．外部領域 Ω ($N \geq 2, \Omega^c$: コンパクト) の場合についても、小さな初期値に対する大域解の存在/非存在を分ける臨界指数が $1 + \frac{2}{N}$ によって与えられることが知られている (Ikehata [4], Ogawa-Takeda [7])．

本研究の発端になったのは、2次の非線形項をもつ2次元熱方程式 ($\partial_t u - \Delta u = u^2$) の外部問題の非自明な大域解の非存在が Ikeda-S. [2] により解決されたことによる．[2] によれば、この問題の非自明解の解の存在時間評価は $u(0) = f \in C_0^\infty(B^c) \setminus \{0\}$ に対して

$$\text{「解の存在時間」} \lesssim \exp(\exp(C\varepsilon^{-1})) \quad (\varepsilon \ll 1)$$

となる (optimality は Grigor'yan-Saloff-Coste [1] の外部領域における熱半群の積分核評価を用いる)．[2] によって本講演で考える問題 (1) の解の存在時間に対する同様の 上からの評価 も導かれてはいるが、波動方程式 (の境界地問題) に対する optimal な解の存在時間評価の解析法は知られていない．

本講演では、Nash 型不等式を用いた新しい手法により optimal な解の存在時間評価が導けることを説明する．

* e-mail: msobajima1984@gmail.com

¹ 本講演の内容は、池田正弘氏 (理化学研究所)、谷口晃一氏 (東北大学)、若杉勇太氏 (広島大学) との共同研究に基づく．

2. Result

以下が、本研究で得た (1) の解の存在時間評価に対する主張である。

Theorem 2.1 (Ikeda–S.–Taniguchi–Wakasugi [3]) $g \in L^2(B^c)$ は球対称で、かつ

$$\int_{B^c} |g(x)| \log |x| dx < +\infty$$

を満たすとする。このとき、ある定数 c, ε_0 が存在して以下を満たす：

$$T_{\max}(0, \varepsilon g) \geq \exp(\exp(c\varepsilon^{-1})) \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0).$$

議論の要となったのは、(1) の方程式に $\log |x|$ をかけて（形式的に積分して）得られる

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right) \int_{B^c} u \log |x| dx = \int_{B^c} |u|^2 \log |x| dx, \quad t \in (0, T)$$

と、この左辺を制御するために新しく導入した Nash 型不等式

$$\int_{B^c} |u|^2 \log |x| dx \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B^c)} \int_{B^c} |u| \log |x| dx$$

である。これらに併せて、 $\|\nabla u\|_{L^2(B^c)}$ の（線型問題での）最適な減衰レートを用いることで非線型問題の解を制御できる。この「非負性」を担保するために初期値に球対称性を課している。詳細について、時間がある限り説明したい。

参考文献

- [1] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste, *Dirichlet heat kernel in the exterior of a compact set*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 93–133.
- [2] M. Ikeda, M. Sobajima, *Remark on upper bound for lifespan of solutions to semilinear evolution equations in a two-dimensional exterior domain*, J. Math. Anal. Appl. **470** (2019), 318–326.
- [3] M. Ikeda, M. Sobajima, K. Taniguchi, Y. Wakasugi, *Lifespan estimates for semilinear damped wave equation in a two-dimensional exterior domain*, preprint (arXiv:2305.05124).
- [4] R. Ikehata, *Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped wave equations*, J. Math. Anal. Appl. **301** (2005), 366–377.
- [5] N.-A. Lai, Y. Zhou, *The sharp lifespan estimate for semilinear damped wave equation with Fujita critical power in higher dimensions*, J. Math. Pures Appl. (9) **123** (2019), 229–243.
- [6] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976/77), 169–189.
- [7] T. Ogawa, H. Takeda, *Non-existence of weak solutions to nonlinear damped wave equations in exterior domains*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 3696–3701.