非線形 4 階シュレディンガー方程式に対する群対称な解の散乱 [1]

駒田 洸一　(中京大学)

1　序

本講演では, 次の非線形 4 階シュレディンガー方程式に対する解の時間大域挙動について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta^2 u + \mu\Delta u = -|u|^{p-1}u, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^2(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $u = u(t,x)$ は複素数値の未知函数, $\mu \geq 0$ であり, p は以下を満たすとする.

$$1 + \tfrac{8}{d} < p < \begin{cases} \infty & \text{if } 1 \leq d \leq 4, \\ 1 + \frac{8}{d-4} & \text{if } d \geq 5. \end{cases} \tag{2}$$

Guo [2], Dinh [1] は $d \geq 2$ かつ初期値が球対称である場合に, 質量とエネルギーのスケール積と H^2 のスケール積がそれぞれ基底状態解より小さい解は散乱することを証明している (ここで, 「散乱する」とは, 解が時間無限大で自由解に漸近することを意味する). これらの先行研究では, 証明において, $d \geq 2$ では球対称函数に対して $|x| \to \infty$ における一様な減衰が得られることを用いており, $d = 1$ の場合は取り扱えていなかった.

Komada–Masaki [4] では, 先行研究 [1], [2] における結果が $d = 1$ かつ初期値が偶函数である場合にも証明することができた. 本講演では, [4] で用いられた証明のアイデアを応用することで, $d \geq 2$ の場合においても球対称性の制限を偶函数性の制限やより一般的な群対称性の制限に緩めることができることを紹介する.

2　G-不変なソボレフ空間

$O(d)$ は $d \times d$ の直交行列全体の集合とする. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times O(d)$ の部分群 G を考える. ただし, $(\theta, \mathcal{G}) \in G$ について, 各直交行列 $\mathcal{G}$ に対して θ が一意に定まっているとする. 従って, 以下では, G の元とその直交行列を区別せず $\mathcal{G}$ と表記する. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times O(d)$ の部分群 G に対して, G-不変なソボレフ空間 H^k_G を以下で定める.

$$H^k_G := \{f \in H^k(\mathbb{R}^d) | f = \mathcal{G}f,\ \forall \mathcal{G} \in G\}.$$

ここで, $\mathcal{G} = (\theta, \mathcal{G}) \in G$ に対して, $\mathcal{G}f(x) := e^{-i\theta} f(\mathcal{G}^{-1}x)$ である.

(1) は G の元の作用に関して不変である. 従って, 解の一意性より, 初期値 u_0 が H^2_G に属するならば, 対応する解 $u(t)$ も G-不変となる. 本講演で紹介する主結果においては, さらに G に対して次を仮定する.

---

[1] 本研究は眞崎 聡 氏 (北海道大学) との共同研究に基づく.

仮定 1　$x \in \mathbb{R}^d$ が全ての $\mathcal{G} \in G$ に対して $\mathcal{G}^{-1}x = x$ を満たすならば, $x = 0$.

3 主結果

(1) に対しては次の質量保存則とエネルギー保存則が成り立つ.

$$\begin{aligned} M(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = M(u(0)), \\ E(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{2}|\Delta u(t,x)|^2 + \tfrac{\mu}{2}|\nabla u(t,x)|^2 - \tfrac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1} dx = E(u(0)). \end{aligned}$$

また, (1) は $u(t,x) = e^{i\omega t}\phi(x)$ という形の定在波解をもつ. ここで, $\omega > 0$ であり, ϕ は次の 4 階楕円型方程式の解である.

$$-\omega\phi - \Delta^2\phi + \mu\Delta\phi + |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

特に, (3) の非自明解の中で作用汎函数 $S_\omega(\phi) := E(\phi) + \frac{\omega}{2}M(\phi)$ の最小元となるものを基底状態解という. 汎函数 $K(\phi)$ を以下で定める.

$$K(\phi) := \tfrac{\partial}{\partial\lambda}E(\lambda^{\frac{d}{2}}\phi(\lambda x))|_{\lambda=1} = \int_{\mathbb{R}^d} 2|\Delta\phi(x)|^2 + \mu|\nabla\phi(x)|^2 - \tfrac{d(p-1)}{2(p+1)}|\phi(x)|^{p+1}dx.$$

(3) の解 ϕ は $K(\phi) = 0$ を満たす. さらに, Q_ω が (3) の基底状態解であることは次と同値である.

$$S_\omega(Q_\omega) = \inf\{S_\omega(\phi) | \phi \in H^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\},\ K(\phi) = 0\}.$$

定理 2（主結果）　$d \geq 1$, $\mu \geq 0$ とし, p は (2) を満たすとする. G は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times O(d)$ の部分群であり, 仮定 1 を満たすとする. $u_0 \in H^2_G$ は, $\omega > 0$ が存在して

$$S_\omega(u_0) < S_\omega(Q_\omega) \quad \text{かつ} \quad K(u_0) > 0$$

を満たすとする. ただし, Q_ω は (3) の基底状態解である. このとき, u_0 を初期値とする (1) の時間大域解 $u \in C(\mathbb{R}, H^2_G)$ が一意に存在し, さらに, u は散乱する. すなわち, $\phi^\pm \in H^2(\mathbb{R})$ が存在して,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - e^{-it(\Delta^2-\mu\Delta)}\phi^\pm\|_{H^2} = 0.$$

4 証明の概略

定理 2 の証明は Kenig–Merle [3] の手法によって行う. 証明では, まず定理 2 を一種の変分問題として定式化する. ここで, もし定理の条件を満たす範囲で散乱しない解が存在する (正確には散乱を示すノルムの一様な有界性が崩れる) と仮定すると, プロファイル分解を用いた凝集コンパクト性の議論によって背理法のターゲットとなる特殊解 u_c が構成できる. さらに, この特殊解の軌道 $\{u_c(t) | t \in \mathbb{R}\}$ が $H^2(\mathbb{R}^d)$ においてプレコンパクトであることも分かる. 最後に, u_c のプレコンパクト性とビリアル等式から矛盾が導かれる.

ここで, 何も対称性を仮定しない場合では特殊解 u_c のプレコンパクト性が弱くなることに注意する. 正確には, 空間平行移動の作用 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ が存在して, $\{u_c(t,\cdot+x(t))|t\in\mathbb{R}\}$ が $H^2(\mathbb{R}^d)$ においてプレコンパクトとなる. 通常の 2 階のシュレディンガー方程式の場合では, 方程式のガリレイ不変性から $x(t)$ の制御ができる. しかし, 4 階シュレディンガー方程式においてはガリレイ不変性がなく, 特殊解の平行移動の制御が難しい. そこで, この平行移動の制御の目的で球対称性が広く用いられている.

今回の主定理においても, G-不変な解に制限することで特殊解の平行移動を制御しているが, この制御の方法が先行研究の球対称の場合とで異なる. その方法を概説する. $d\geq 2$ かつ球対称の場合での先行結果 [2] では, 以下の球対称函数 $f\in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ に対するソボレフの不等式を用いている.

$$\|f\|_{L^\infty(|x|>R)}\leq CR^{-\frac{d-1}{2}}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(|x|>R)}\|\nabla f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(|x|>R)}$$

ここで, $C>0$ は f や R に依存しない定数である. この不等式より, $d\geq 2$ では球対称函数に対して $|x|\to\infty$ における一様な減衰が得られる. このことを用いることによって, $d\geq 2$ では $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ の函数列に対して, 空間平行移動の作用を含まないプロファイル分解が得られる. 一方, $d=1$ での偶函数列や一般の G-不変な函数列に対しては, プロファイル分解の段階では空間平行移動を制御できない.

そこで注目するのは, H^2_G の函数列に対するプロファイル分解においては, もし無限遠方に空間平行移動していくようなプロファイルが存在するならば, G が仮定 1 を満たす場合では, 必ずそれとは異なる空間方向に平行移動する他のプロファイルが存在するという事実である. この事実を用いることで, 2 個以上のプロファイルへの分裂が凝集コンパクト性の議論により排除される際に空間平行移動も併せて制御されるのである. こうして, u_c に対して平行移動の作用を含まない強い意味でのプレコンパクト性が得られる.

参考文献

[1] V. D. Dinh, *Dynamics of radial solutions for the focusing fourth-order nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinearity **34** (2021), 776–821.

[2] Q. Guo, *Scattering for the focusing L^2-supercritical and $\dot{H}^2$-subcritical biharmonic NLS equations*, Commn. PDE **41** (2016), 185–207.

[3] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), 645–675.

[4] K. Komada and S. Masaki, *Scattering for the focusing, L^2-supercritical fourth-order NLS in one dimension*, arXiv:2306.12068.