

ヒルベルト空間論と制御理論

瀬戸 道生 (防衛大学校)*

2023年11月25日 神楽坂解析セミナー

概要

この講演では、抽象的なヒルベルト空間上の作用素論と制御理論との関連を、 H^∞ -実現公式を中心に紹介します。

1. 伝達関数

連立差分方程式

$$\begin{cases} y(n) = Au(n) + Bx(n) \\ x(n+1) = Cu(n) + Dx(n) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (n \geq 0) \quad (1.1)$$

を考える。ここで、 $u(n)$ と $y(n)$ はスカラー、 $x(n)$ はベクトルとし、 A, B, C, D は適切なサイズの行列とする。この連立差分方程式 (1.1) を、 $u(n)$ を入力、 $y(n)$ を出力とするシステムとみなす。特に、制御理論において、フィードバックを含むシステム（回路等）は (1.1) により表される（制御理論については [4] が参考になる）。次に、

$$\hat{u}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\lambda^n, \quad \hat{y}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\lambda^n$$

と定めると、形式的な計算で

$$\hat{y}(\lambda) = (A + \lambda B(I - \lambda D)^{-1}C)\hat{u}(\lambda)$$

が成り立つことがわかる。ここで現れた関数

$$A + \lambda B(I - \lambda D)^{-1}C$$

はシステム (1.1) の伝達関数と呼ばれる。

2. H^∞ -実現公式

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位開円板を $\mathbb{D}$ と表し、 $\mathbb{D}$ で定義された有界な正則関数の全体を $H^\infty(\mathbb{D})$ と表す。このとき、 $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ に対し、 $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |f(\lambda)|$ と定める。

定理 2.1 (H^∞ -実現公式) $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ に対し、 $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ ならば、

$$\exists \mathcal{H} \text{ (ヒルベルト空間)} \text{ and } \exists V : \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \text{ (等距離作用素)}$$

本研究はJSPS 科研費 20K03646, 21K03285 の助成を受けたものである。

* 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水1-10-20 防衛大学校 数学教育室

e-mail: mseto@nda.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/mseto>

$$\text{s.t. } \varphi(\lambda) = A + \lambda B(I - \lambda D)^{-1}C \quad \text{where } V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

また逆に, (2.1) により定められる φ は $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ を満たす $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数である.

- H^∞ -実現公式の中に, システム (1.1) の伝達関数が出てきたことに注目!

H^∞ -実現公式に関する数学側での発展については [1] と [2] が詳しい.

3. 安定性の判定

伝達関数を用いてシステムの安定性を測ることができる. システムの安定性には複数の定義が考えられるが, ここでは次を採用しよう.

定義 3.1 システム (1.1) に対し,

$$\|y\|_{\ell^2} \leq M \|u\|_{\ell^2} \quad (\forall u \in \ell^2)$$

をみたす定数 $M > 0$ が存在するとき, (1.1) は ℓ^2 -安定であるという.

さて, システム (1.1) の伝達関数を φ と表すとき, $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ ならば,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k |y(n)|^2 r^{2n} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |y(n)|^2 r^{2n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{y}(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta}) \widehat{u}(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)|^2 r^{2n} \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \|u\|_{\ell^2}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, $r \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\|y\|_{\ell^2} \leq \|\varphi\|_\infty \|u\|_{\ell^2} \quad (\forall u \in \ell^2)$$

が得られる. すなわち, 伝達関数 φ が $\mathbb{D}$ 上の有界正則関数ならば, システム (1.1) は ℓ^2 -安定である. 現実の問題を考える上では, φ は有理関数と仮定してよく, $\|\varphi\|_\infty$ の値が大きいと上の評価はあまり役に立たない. 従って, その際, φ の極の位置が問題となる. この議論は初等的なものであるが, H^∞ -制御への入口である ([3]).

参考文献

- [1] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*. Graduate Studies in Mathematics, 44. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2] J. Agler, J. E. McCarthy and N. Young, *Operator analysis–Hilbert space methods in complex analysis*. Cambridge Tracts in Mathematics, 219. Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [3] 木村英紀, 古典的補間理論の回路、制御への応用, 京都大学数理解析研究所講究録, 653 (1988), 87–108.
- [4] 杉江俊治, 藤田政之, フィードバック制御入門, コロナ社, 1999.