

Properties of a solution to a free boundary problem with flux boundary conditions and its application to two-scale models

熊崎 耕太 (京都教育大学教育学部)

1. 導入

本講演では、以下の1次元自由境界問題 $(P) = \{(1.1) - (1.5)\}$ について考える:

$$u_t - u_{zz} = 0 \text{ for } (t, z) \in (0, T) \times (a, s(t)), \quad (1.1)$$

$$-u_z(t, a) = \beta(b(t) - \gamma u(t, a)) \text{ for } t \in (0, T), \quad (1.2)$$

$$-u_z(t, s(t)) = u(t, s(t))s_t(t) \text{ for } t \in (0, T), \quad (1.3)$$

$$s_t(t) = a_0(u(t, s(t)) - \varphi(s(t))) \text{ for } t \in (0, T), \quad (1.4)$$

$$s(0) = s_0, u(0, z) = u_0(z) \text{ for } z \in [a, s_0]. \quad (1.5)$$

ここで、未知関数は $s = s(t)$ および $u = u(t, z) \in (a, s(t))$ で a, a_0, γ, s_0 は与えられた正定数、 b は $(0, T)$ 上の、 φ は実数上の、 u_0 は $[a, s_0]$ 上の与えられた関数である。また β は、 $\beta(r) = 0$ for $r \leq 0$ かつ $\beta(r) > 0$ for $r \geq 0$ を満たす C^1 関数である。

本問題は、多孔質媒体内の1つの細孔内で起こる湿潤現象を表す数学モデルである。このモデルにおいて、1つの細孔を1次元区間 $[a, +\infty)$ とみなしており、(1.1) は水分領域 $[a, s(t)]$ における水分 u の拡散を表している。(1.2) 式は固定境界 $z = a$ で空気中の水分 b と接していることを表し、空気中の水分 b が多く存在しているときに細孔内部に流れ込むことを表している。また、(1.3) 式は水分領域の先端 $z = s(t)$ における質量保存則から得られる条件、(1.4) 式は水分領域の先端の成長率を表す常微分方程式である。(1.4) 式右辺第2項は摩擦などにより水分領域の成長が阻害されることを意味している。

2. 自由境界問題の解の存在と性質

本講演では、まず問題 (P) に対する解の存在と解の性質について報告する。詳細な仮定および解の定義については講演内で紹介する。以下、 b^* は $0 \leq b \leq b^*$ on $[0, T]$ となる正定数である。

定理1(cf. [2, 3]) 適切な仮定のもと、任意の $T > 0$ に対して、 (P) は $[0, T]$ 上一意解 (s, u) を持ち、次を満たす: $\varphi(a) \leq u(t, z) \leq b^*/\gamma$ for $(t, z) \in [0, T] \times (a, s(t))$ かつ $s \geq s_* > a$ on $[0, T]$. ここで、 s_* は $s_* > a$ を満たす正定数である。

定理2(cf. [3]) (s, u) を (P) の $[0, \infty)$ 上の解とする。このとき、適切な仮定のもと以下のどちらかが成り立つ:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \beta(b(\tau) - \gamma u(\tau, a)) d\tau = \infty \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \infty. \\ (ii) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \beta(b(\tau) - \gamma u(\tau, a)) d\tau \leq \frac{b^*}{\gamma} (r_\varphi - r_*) \text{ and} \\ & \limsup_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq a + \frac{1}{\varphi(a)} \frac{b^*}{\gamma} (s_0 - a + r_\varphi - r_*). \end{aligned}$$

ここで、 $r_* := a + \gamma(b^*)^{-1} |u_0|_{L^1(a, s_0)}$ である。

3. Two-scale モデルへの応用

1次元自由境界問題 (P) の応用として、以下の問題 (MP) を考えることができる:

$$b_t - \Delta b = -\beta(b - \gamma u(t, x, a)) \text{ in } Q(T) := (0, T) \times \Omega, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial n} = 0 \text{ on } S(T) := (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.2)$$

$$u_t - u_{zz} = 0 \text{ on } Q_s(T) := Q(T) \times (a, s(t, x)), \quad (2.3)$$

$$-u_z(t, x, a) = \beta(b(t, x) - \gamma u(t, x, a)) \text{ for } (t, x) \in Q(T), \quad (2.4)$$

$$-u_z(t, x, s(t, x)) = u(t, x, s(t, x)) s_t(t, x) \text{ for } (t, x) \in Q(T), \quad (2.5)$$

$$s_t(t, x) = a_0(u(t, x, s(t, x)) - \varphi(s(t, x))) \text{ for } (t, x) \in Q(T), \quad (2.6)$$

$$b(0, x) = b_0(x) \text{ in } \Omega, \quad (2.7)$$

$$s(0, x) = s_0(x) \text{ in } \Omega, \quad u(0, x, z) = u_0(x, z) \text{ for } (x, z) \in Q_{s_0} := \Omega \times [a, s_0(x)], \quad (2.8)$$

ここで、 Ω は $\mathbb{R}^3$ のなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域、 n は $\partial\Omega$ 上の外向単位法線ベクトルである。未知関数は $b = b(t, x)$, $s = s(t, x)$ および $u = u(t, x, z) \in \bigcup_{0 < t < T, x \in \Omega} (a, s(t, x))$, b_0 及び s_0 は Ω 上の、 u_0 は $\Omega \times [a, s_0(x)]$ 上の与えられた関数である。

設定として Ω は多孔質媒体全体を表し、 Ω 内のすべての細孔を半开区間 $[a, +\infty)$ と仮定している: すなわち、 $\omega(x)$ を $x \in \Omega$ における細孔とすると $\omega(x) = [a, +\infty)$ である。この設定の下、 b は多孔質媒体 Ω 全体で観測される空気中の水分、 $u = u(t, x, z)$ は各 $\omega(x)$ における水分、 $[a, s(t, x)]$ は各 $\omega(x)$ における水分領域を表している。

本問題は Ω における数量 b の変化と $\omega(x)$ の数量 (s, u) の変化を組み合わせたものとなっている。こうしたスケールの異なる2つの領域を組み合わせたモデルは「two-scale モデル」とよばれており、A. Friedman ら [1] によって導入された概念である。

問題 (MP) に対しては、 $\tilde{u}(t, x, y) = u(t, x, (1-y)a + ys(t))$ ($t \in (0, T), x \in \Omega, y \in (0, 1)$) を用いて固定領域 $Q(T) \times (0, 1)$ に書き換えた問題 $(\widetilde{\text{MP}})$ により解析を行う。本講演では $(\widetilde{\text{MP}})$ に対する結果についても紹介したい。以下、 $\tilde{u}_0(x, y) = u_0(x, (1-y)a + ys_0) \in L^\infty(0, 1)$, $X = H^1(0, 1)$, X^* は $H^1(0, 1)$ の共役空間 $(H^1(0, 1))^*$ である。詳細な仮定や解の定義については講演内で紹介する。得られた結果は以下である:

定理 3 適切な仮定のもと、任意の $T > 0$ に対して $(\widetilde{\text{MP}})$ は $[0, T]$ 上一意解 $(b, s, \tilde{u})$ を持つ。さらに、解 $(b, s, \tilde{u})$ は以下を満たす: $0 \leq b \leq 1$ a.e. on $Q(T)$, $\varphi(a) \leq \tilde{u} \leq b^*/\gamma$ a.e. on $Q(T) \times (0, 1)$ and $s \geq s_* > a$ a.e. on $Q(T)$.

定理 4 定理 3 と同じ仮定をする。 $(b, s, \tilde{u})$ を $(\widetilde{\text{MP}})$ の $[0, \infty)$ の解とし、 $x \in \Omega$ に対して $m(x) = \int_0^\infty \beta(b(\tau) - \gamma \tilde{u}(\tau, x, 0)) d\tau$ かつ $M = \int_0^\infty \int_\Omega \beta(b(\tau) - \gamma \tilde{u}(\tau, x, 0)) dx d\tau$ とおく。このとき、以下が成り立つ:

$$(i) \quad b(t) \rightarrow b_\infty := \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_\Omega b_0(x) dx - M \right) \text{ in } L^2(\Omega), \text{ weakly in } H^1(\Omega) \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad \tilde{u}(t) \rightarrow \tilde{u}_\infty \text{ in } X^*, \text{ weakly in } L^2(0, 1), \quad s(t) \rightarrow s_\infty \text{ in } \mathbb{R} \text{ a.e. on } \Omega \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

ここで、 $(s_\infty, \tilde{u}_\infty)$ は $\gamma(s_\infty - a)\tilde{u}_\infty = \gamma(s_0 - a) \int_0^1 \tilde{u}_0(x, y) dy + m(x)$ a.e. on Ω を満たす。

時間大域解の存在は、時間局所解の延長によって示される。時間局所解の存在については、数量 b に関するノイマン問題 $\{(2.1), (2.2), (2.7)\}$ の解と数量 $(s, \tilde{u})$ に関する自由境界問題 $\{(2.3)–(2.6), (2.8)\}$ の解をつなぐ写像を定義し、自由境界問題の解 $(s, \tilde{u})$ の Ω 上における可測性および連続依存性の結果 (cf. [4]) を援用しバナッハの不動点定理より示される。特に自由境界 s に関しては (2.3) 式より得られる質量保存則:

$$(s(t) - a) \int_0^1 \tilde{u}(y) dy = (s_0 - a) \int_0^1 \tilde{u}_0(y) dy + \int_0^t \beta(b(\tau) - \gamma \tilde{u}(\tau, 0)) d\tau \quad (3.1)$$

と (A2) における β の非負値性より、下限 s_* の存在を示すことができる。この結果により時間局所解を延長することができる。また、問題 $(\widetilde{\text{MP}})$ の $[0, \infty)$ 上の解 $(b, s, \tilde{u})$ に対して以下の評価が成り立つ:

- (i) $\int_0^t \int_{\Omega} \beta(b(\tau) - \gamma \tilde{u}(\tau, 0)) dx d\tau \leq M_1$ for $t > 0$,
- (ii) $|b|_{V(t)}^2 + |b_t|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + |\nabla b(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M_2$ for $t > 0$,
- (iii) $s(t) \leq M_3$, $\int_0^t \beta(b(\tau) - \gamma \tilde{u}(\tau, 0)) d\tau \leq M_3$ for $t > 0$, a.e. on Ω ,
- (iv) $|\tilde{u}|_{W^{1,2}(0,T);X^*}^2 + |\tilde{u}|_{V(t)}^2 + |s_t|_{L^2(0,t)}^2 \leq M_4$ for $t > 0$, a.e. on Ω .

ここで、 $M_i (1 \leq i \leq 4)$ は時間に依存しない正定数である。この結果から時間に関する極限関数 $(b_{\infty}, s_{\infty}, \tilde{u}_{\infty})$ が

$$\int_{\Omega} b_{\infty} dx = \int_{\Omega} b_0 dx, \quad (s_{\infty} - a) \int_0^1 \tilde{u}_{\infty}(y) dy = (s_0 - a) \int_0^1 \tilde{u}_0(y) dy \quad \text{a.e. on } \Omega \quad (3.2)$$

をみたす $(\widetilde{\text{MP}})$ の定常問題の解となることを示す。特に、(3.2) を満たす定常問題の解は一意であることから定理 4 を示すことができる。

参考文献

- [1] A. Friedman and A. E Tzavaras, *A quasilinear parabolic system arising in modelling of catalytic reactors*, Journal of Differential Equations, vol. 70 (1987), no. 2, pp. 167–176.
- [2] K. Kumazaki and A. Muntean, *Local weak solvability of a moving boundary problem describing swelling along a halfline*, Networks and Heterogeneous media, vol. 14 (2019), no. 3, pp. 445–469.
- [3] K. Kumazaki and A. Muntean, *Global weak solvability, continuous dependence on data, large time growth of swelling moving interfaces*, Interfaces and Free boundaries, vol. 22 (2020), no. 1, pp. 27–49.
- [4] K. Kumazaki, *Measurability of a solution to a free boundary problem describing swelling phenomenon in porous materials*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, vol. 33 (2024), no. 1, pp. 55–76.