3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する local mountain pass approach によるピーク解の構成

埼玉大学　大学院理工学研究科
長田祐輝 (Yuki OSADA) *

概要

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対して十分小さい ε に対するピーク解の存在性および $\varepsilon \to +0$ におけるピーク解の漸近挙動について考察する:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 = \mu_1 |u_1|^{p-1} u_1 + \alpha u_2 u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 = \mu_2 |u_2|^{p-1} u_2 + \alpha u_1 u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_3 + V_3(x) u_3 = \mu_3 |u_3|^{p-1} u_3 + \alpha u_1 u_2, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, $N \leq 5$, $1 \leq p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N = 1, 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$, $\varepsilon, \alpha > 0$. 正確にはポテンシャルから定まる位置決め関数と呼ばれる関数 $c(V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ を定義し, 十分小さい ε に対して $c(V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ の極小点に集中するピーク解を構成する.

1　導入

Cazenave-Lions [1] は

$$i\partial_t v + \Delta v + |v|^{p-1} v = 0 \tag{1}$$

の定在波解の存在および安定性について研究した. この方程式は様々な物理的, 生物学的文脈で現れ, 例えば, 非線形光学, ボーズ・アインシュタイン凝縮現象, DNA 構造のモデリング等に現れる. ここで定在波解とは, $v(t,x) = e^{i\omega t} u(x)$ という形の (1) の解である. このとき u は

$$-\Delta u + \omega u - |u|^{p-1} u = 0$$

をみたす. 方程式 (1) の線形部分には分散効果があり, 時間発展させると, 解を平らにする効果がある. また非線形部分には集中効果があり, 解を集中させる効果がある. この分散効果と集中効果が相殺したときに現れるのが定在波解である (Le Coz [9] も参照).

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 = \mu_1 |u_1|^{p-1} u_1 + \alpha u_2 u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 = \mu_2 |u_2|^{p-1} u_2 + \alpha u_1 u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_3 + V_3(x) u_3 = \mu_3 |u_3|^{p-1} u_3 + \alpha u_1 u_2, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$}$$

* E-mail:yukiosada59@gmail.com
本研究は埼玉大学の佐藤洋平氏との共同研究に基づく.

ここで, $N \le 5$, $1 < p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N \le 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$ $(N \ge 3)$, $\varepsilon > 0$, $\mu_j > 0$ $(j = 1,2,3)$, $\alpha > 0$. また, ポテンシャル V_j $(j = 1,2,3)$ に対して次の基本的な条件を仮定する:

(V1) $\forall j = 1,2,3$, $V_j \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(V2) $\forall j = 1,2,3$, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V_j(x) =: m_j > 0$.

$(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は変分構造をもつ. すなわち, $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の解は次の汎関数の臨界点と 1 対 1 に対応している:

$$\tilde{I}_\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2\,dx - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\|u_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \alpha\int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3\,dx,$$
$$\vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{H} = H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N).$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $q \ge 1$ に対して,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega |u|^q\,dx, \quad \|u\|_{L^q} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

と定義する.

$(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は次の時間発展する 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の定在波解に関係している:

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t v_1 + \varepsilon^2\Delta v_1 - \tilde{V}_1(x)v_1 + \mu_1|v_1|^{p-1}v_1 = -\alpha\bar{v}_2v_3 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \\ i\varepsilon\partial_t v_2 + \varepsilon^2\Delta v_2 - \tilde{V}_2(x)v_2 + \mu_2|v_2|^{p-1}v_2 = -\alpha\bar{v}_1v_3 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \\ i\varepsilon\partial_t v_3 + \varepsilon^2\Delta v_3 - \tilde{V}_3(x)v_3 + \mu_3|v_3|^{p-1}v_3 = -\alpha v_1v_2 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2}$$

実際, もし, $(v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t,x)) = (e^{i\omega_1 t/\varepsilon}u_1(x), e^{i\omega_2 t/\varepsilon}u_2(x), e^{i\omega_3 t/\varepsilon}u_3(x))$ (但し, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) が (2) の解なら, (u_1,u_2,u_3) は $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ (但し, $V_j(x) = \omega_j + \tilde{V}_j(x)$) をみたす. ここで u_1,u_2,u_3 は実数値関数である. 方程式系 (2) は Colin-Colin-Ohta [5] によって導入された (但し, $\tilde{V}_j(x) \equiv 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu_j = 1$). [2, 3] も参照. Colin-Colin-Ohta [4, 5] は定在波解 $(e^{i\omega t}\varphi, 0, 0)$ と $(0, e^{i\omega t}\varphi, 0)$ は任意の $\alpha > 0$ に対して安定であることを示した. ここで $\omega > 0$ であり, φ は

$$-\Delta v + \omega v - |v|^{p-1}v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

の一意の正値球対称解である. 一方で, 定在波解 $(0,0,e^{i\omega t}\varphi)$ は $0 < \alpha < \alpha^*$ のとき安定であり, $\alpha > \alpha^*$ のとき不安定である. ここで α^* は適切な正定数である (詳細は [4, 5] を参照せよ).

Pomponio [12] は $\varepsilon = 1$ の場合に $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のエネルギー最小解の存在性を示した. 特に, Pomponio は α が十分大きいとき, すべての成分が 0 でないエネルギー最小解 (vector least energy solution) の存在性を示した.

本講演では, $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の特異摂動問題について研究する. これは $\varepsilon \to +0$ において $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のピーク解を構成する問題である. 特異摂動問題の研究は Floer-Weinstein [7] による単独の非線形シュレディンガー方程式から始まった. [7] の後, 近年, 単独の非線形シュレディンガー方程式

$$-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{3}$$

に対するピーク解の構成に関する研究が膨大にある. ここで, 非負値関数 $V(x)$ (ポテンシャル) と $f(u)$ は適切な仮定をみたしている. 特に del Pino-Felmer [6] の研究ではポテンシャル $V(x)$ の極小点に集中する解を構成している. その際, 汎関数を適切に修正し, 修正された汎関数の臨界点を求めることで元の方程式の解で極小点に集中する解を構成している. 本講演では [6] の研究を参考にし, 位置決め関数 $c(\vec{V}(x))$ (あとで定義する) の極小点に集中する解を構成する.

Lin-Wei [10] と Ikoma-Tanaka [8] は次の非線形シュレディンガー方程式系に対して特異摂動問題を研究した:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2 > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4}$$

ここで, $N \leq 3$, $\mu_i > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ であり, 非負値関数 $V_i(x)$ は適切な仮定をみたす. 彼らは $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ のピーク解の挙動には 2 つの可能性があることを示した. 実際, (4) は次のようなピーク解 $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ をもつ: $i = 1, 2$ に対して, ある $\varepsilon_n \to 0$ と $x_{in} \in \mathbb{R}^N$ が存在して $x_{in} \to x_{i0}$ in $\mathbb{R}^N$ かつ $u_{i\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + x_{in}) \to \omega_i(y)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. ここで x_{i0} は $V_i(x)$ の最小点であり ω_i は $-\Delta u_i + V_i(x_{i0})u_i = \mu_i u_i^3$ in $\mathbb{R}^N$ のエネルギー最小解である. 一方, (4) は次のような解 $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ をもつ: ある $\varepsilon_n \to 0$ と $x_n \in \mathbb{R}^N$ が存在して $x_n \to x_0$ in $\mathbb{R}^N$ かつ $u_{i\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + x_n) \to \omega_i(y)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(i = 1, 2)$. ここで x_0 は $\rho(V_1(x), V_2(x))$ の極小点であり $\rho(\lambda_1, \lambda_2)$ は次の方程式系の最小エネルギーである:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + \lambda_1 u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2 > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5}$$

さらに, (ω_1, ω_2) は $(\lambda_1, \lambda_2) = (V_1(x_0), V_2(x_0))$ としたときの (5) のエネルギー最小解である.

我々の先行研究 [11] では, $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の特異摂動問題を考え, $[2, 2^*)$ の場合に $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のピーク解が存在することを示した. この構成では, 次の極限問題が重要な役割を果たす:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + \lambda_1 v_1 = \mu_1 |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_2 + \lambda_2 v_2 = \mu_2 |v_2|^{p-1} v_2 + \alpha v_1 v_3 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_3 + \lambda_3 v_3 = \mu_3 |v_3|^{p-1} v_3 + \alpha v_1 v_2 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}^{\vec{\lambda}}$}$$

ここで $\lambda_j > 0$ $(j = 1, 2, 3)$. $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とおく. 次のように $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ に対応する汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ を定義する:

$$\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) := \frac{1}{2}\|\vec{v}\|_{\vec{\lambda}}^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3} \mu_j \|v_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy.$$

ここで

$$\|u\|_{\lambda_j}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda_j u^2)\, dx, \quad \|\vec{u}\|_{\vec{\lambda}}^2 := \sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_{\lambda_j}^2.$$

また $\Phi_{\vec{\lambda}}$ に対する mountain pass value $c(\vec{\lambda})$ を定義する:

$$
\begin{aligned}
&c(\vec{\lambda}) := \inf_{\vec{\gamma}\in\Gamma_{\vec{\lambda}}} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{\gamma}(t)),\\
&\Gamma_{\vec{\lambda}} := \{\vec{\gamma}\in C([0,1];\mathbb{H}) \mid \vec{\gamma}(0)=\vec{0},\ \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{\gamma}(1))<0\},\\
&\vec{0} := (0,0,0).
\end{aligned}
$$

$\vec{v}\in\mathbb{H}$ が $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ の mountain pass solution であるとは $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) = c(\vec{\lambda})$ かつ $(\Phi_{\vec{\lambda}})'(\vec{v}) = 0$ が成り立つことである. ここで関数 $\vec{\lambda}\mapsto c(\vec{\lambda})$ は $(0,\infty)^3$ 上で連続であることに注意する.

[11] の中で得られたピーク解 $\vec{u}_\varepsilon = (u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, u_{3\varepsilon})$ は次をみたす: ある $\varepsilon_n\to 0$ と $x_n\in\mathbb{R}^N$ が存在して

$$
x_n \to x_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad \vec{u}_{\varepsilon_n}(x_n+\varepsilon_n y) \to \overrightarrow{W}(y) \quad \text{in } \mathbb{H}.
$$

ここで x_0 は $c(\vec{V}(x))$ の最小点であり $\overrightarrow{W} = (W_1, W_2, W_3)$ は $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ のエネルギー最小解である. さらに, α が小さいとき $\overrightarrow{W}$ の 2 つの成分が 0 になる. したがって $\overrightarrow{W}$ は単独の方程式の解とみなせる. α が大きいとき, $W_j\neq 0$ $(j=1,2,3)$ となることが分かる. さらに, $u_{j\varepsilon}$ の最大点の詳細な挙動についての結果も得た.

本講演では $c(\vec{V}(x))$ の極小点に集中する $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のピーク解を構成するために次の条件を仮定する:

(V3) 有界開集合 $\Lambda\subset\mathbb{R}^N$ が存在して $\inf_{x\in\Lambda} c(\vec{V}(x)) < \inf_{x\in\partial\Lambda} c(\vec{V}(x))$.

(V1),(V3) と平行移動により, 一般性を失うことなく次を仮定してよい:

$$
0\in\Lambda, \quad c(\vec{V}(0)) = \inf_{x\in\Lambda} c(\vec{V}(x)). \tag{6}
$$

2 主定理

$\Lambda_0 = \{x\in\Lambda \mid c(\vec{V}(x)) = c(\vec{V}(0))\}$ とおく. 本講演の主結果を述べる.

主結果 2.1. (V1)–(V3) を仮定する. このとき, ある $\varepsilon_*>0$ が存在して任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$ に対して $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は次をみたす非負値非自明解 $\vec{u}_\varepsilon$ をもつ:

(i) $\tilde{I}_\varepsilon(\vec{u}_\varepsilon) = \varepsilon^N \left(c(\vec{V}(0)) + o(1)\right) \quad \text{as } \varepsilon\to+0.$

(ii) $\Lambda_0\subset D$ をみたす任意の有界開集合 D に対して, ある $c_1, c_2>0$ が存在して

$$
0\le u_{j\varepsilon}(x) \le c_1 e^{-\frac{c_2}{\varepsilon}\operatorname{dist}(x,\overline{D})} \quad (\forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{D}, \quad j=1,2,3).
$$

(iii) $\varepsilon_n\to+0$ となる任意の $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 部分列をとれば, ある $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\Lambda$ と $x_0\in\Lambda_0$ と $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ の非負値非自明解 $\vec{\omega}$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&x_n\to x_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,\\
&\vec{u}_{\varepsilon_n}(x_n+\varepsilon_n y) \to \vec{\omega}(y) \quad \text{in } \mathbb{H}.
\end{aligned}
$$

$p \in [2, 2^*)$ のときは, $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ の非負の mountain pass solution がエネルギー最小解であることが分かる. ここで,

$$\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{\omega})[\vec{\omega}] = 0,\ \vec{\omega} \neq \vec{0}, \quad \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{\omega}) = \inf\{\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{u}) \mid \Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{u})[\vec{u}] = 0,\ \vec{u} \neq \vec{0}\}$$

をみたす $\vec{\omega}$ を $\Phi_{\vec{\lambda}}$ の Nehari 多様体上の minimizer という. $p \in [2, 2^*)$ のときは $\vec{\omega}$ が $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ のエネルギー最小解であることと $\Phi_{\vec{\lambda}}$ の Nehari 多様体上の minimizer であることは同値である.

さらに, ある $\alpha_0 > 0$ が存在して, $\alpha > \alpha_0$ ならば, $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ のエネルギー最小解 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は $\omega_j \neq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ をみたす ([12] の Theorem 1.8 を参照せよ). したがって主結果 2.1 の解 $\vec{u}_\varepsilon = (u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, u_{3\varepsilon})$ は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $u_{j\varepsilon} \neq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ をみたす. $p \in (1, 2)$ のとき, 3 波相互作用項の効果が $\mu_j \|u_j\|^{p+1}_{L^{p+1}}$ より強いので, $\{\vec{u} \in \mathbb{H} \mid \Phi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{u})[\vec{u}] = 0,\ \vec{u} \neq \vec{0}\}$ の上で $\Phi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{u})$ が下に有界とは限らない. したがって $\Phi_{\vec{V}(x_0)}$ の Nehari 多様体上の minimizer を考えることができない. それゆえ $c(\vec{V}(x))$ を mountain pass value で定義し, $\tilde{I}_\varepsilon$ and $\Phi_{\vec{V}(x_0)}$ の moutain pass 構造を用いて主結果 2.1 の解を得ることができる.

3 証明の鍵

$(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の特異摂動問題の研究では次のリスケールした方程式を考えることが効果的である: $\vec{v}(y) = \vec{u}(\varepsilon y)$ とおく. このとき $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は次のようになる:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + V_1(\varepsilon y) v_1 = \mu_1 |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_2 + V_2(\varepsilon y) v_2 = \mu_2 |v_2|^{p-1} v_2 + \alpha v_1 v_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_3 + V_3(\varepsilon y) v_3 = \mu_3 |v_3|^{p-1} v_3 + \alpha v_1 v_2, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

このとき $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ に対応する汎関数は以下のようになる:

$$I_\varepsilon(\vec{v}) := \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2_{\vec{V}_\varepsilon} - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3} \mu_j \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} - \alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy.$$

ここで $\vec{V}_\varepsilon(y) = \vec{V}(\varepsilon y) = (V_1(\varepsilon y), V_2(\varepsilon y), V_3(\varepsilon y))$. $c(\vec{V}(x))$ の極小点に集中する解を構成するために, del Pino-Felmer [6] に着想を得たカットオフ法を用いる. まず, 非線形項 $\mu_j \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}}$ と相互作用項 $\int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy$ を修正する. $\mu_j \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}}$ の修正は [6] と同様である. $\int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy$ の修正は [6] に触発された我々の新しいアイデアである. 正確には次のように修正する: $q := \min\{2, p\}$ とおく. $\nu > 0$ を次をみたすように選ぶ:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{1}{2} m_j - (\mu_j + \alpha)\nu > 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{7}$$

$f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を

$$f(\xi) := \min\{\xi^p, \nu\xi\} \quad (\xi \geq 0)$$

となる奇関数とし, F を $F(\xi) := \int_0^\xi f(\tau)\, d\tau$ となる偶関数とする. $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を

$$g(\xi) := \min\{1, \nu|\xi|^{-\frac{1}{3}}\} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

となる偶関数とし, G を $G(\xi) := \int_0^\xi g(\tau)\,d\tau$ となる奇関数とする.

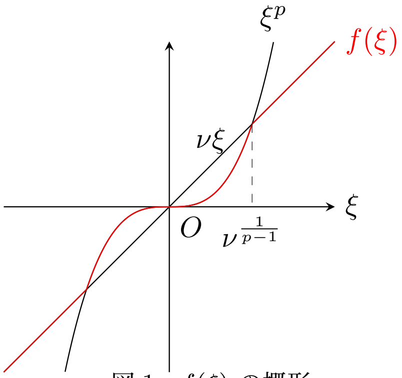

図 1　$f(\xi)$ の概形

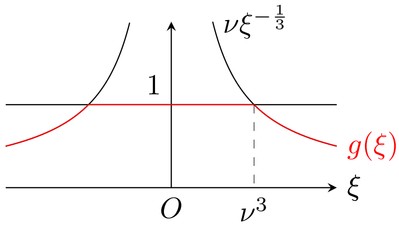

図 2　$g(\xi)$ の概形

$\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ を (V3) をみたす有界開集合とする. $x \mapsto c(\vec{V}(x))$ は連続であるから,

$$\overline{\Lambda} \subset \Lambda', \quad c(\vec{V}(0)) = \inf_{x\in\Lambda} c(\vec{V}(x)) < \inf_{x\in\overline{\Lambda'}\setminus\Lambda} c(\vec{V}(x)). \tag{8}$$

となる有界開集合 $\Lambda' \subset \mathbb{R}^N$ が存在する. $\chi \in C(\mathbb{R}^N; [0,1])$ を次をみたす関数とする:

$$\chi(y) = \begin{cases} 1 & (y \in \Lambda) \\ 0 & (y \notin \Lambda') \end{cases}$$
$$\chi(y) \in (0,1] \quad (y \in \Lambda' \setminus \Lambda).$$

次の修正された汎関数を考える:

$$J_\varepsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2_{\vec{V}_\varepsilon} - \sum_{j=1}^{3} \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon y)\frac{1}{p+1}|v_j|^{p+1} + (1-\chi(\varepsilon y))F(v_j)\,dy$$
$$- \alpha \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon y)v_1v_2v_3 + (1-\chi(\varepsilon y))G(v_1v_2v_3)\,dy.$$

このとき,

$$f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad F(\xi) = \frac{1}{p+1}|\xi|^{p+1} \quad (\forall|\xi| \le \nu^{\frac{1}{p-1}}),$$
$$g(\xi) = 1, \quad G(\xi) = \xi \quad (\forall|\xi| \le \nu^3)$$

より $\vec{v} \in \mathbb{H}$ が

$$|v_j(y)| \le \nu^{\frac{1}{p-1}} \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon,\ j = 1,2,3), \tag{9}$$
$$|v_1(y)v_2(y)v_3(y)| \le \nu^3 \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon) \tag{10}$$

をみたすならば, $J_\varepsilon(\vec{v}) = I_\varepsilon(\vec{v})$ が成り立つ. ここで $\Lambda_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^N \mid \varepsilon y \in \Lambda\}$. 実は十分小さい ε に対して (9)–(10) をみたす J_ε の臨界点 $\vec{v}_\varepsilon$ が存在するので I_ε の臨界点になる. この臨界点が我々の求めるピーク解である.

4 汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ と J_ε の mountain pass 構造と (PS)–条件

汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ と J_ε は次のような mountain pass 構造をもっている:

補題 4.1. $\Phi_{\vec{\lambda}}$ は次のような mountain pass 構造をもつ:

(MP1) $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{0}) = 0$.
(MP2) ある $\delta_1, \rho_1 > 0$ が存在して $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) \geq \delta_1$ ($\|\vec{v}\|_{\vec{\lambda}} = \rho_1$) かつ $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) \geq 0$ ($\|\vec{v}\|_{\vec{\lambda}} \leq \rho_1$).
(MP3) ある $\vec{e} \in \mathbb{H}$ が存在して $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{e}) < 0$.

補題 4.2. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して, J_ε は次のような mountain pass 構造をもつ:

$(\mathrm{MP1})_\varepsilon$ $J_\varepsilon(\vec{0}) = 0$.
$(\mathrm{MP2})_\varepsilon$ ε によらない $\delta_0, \rho_0 > 0$ が存在して $J_\varepsilon(\vec{v}) \geq \delta_0$ ($\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}} = \rho_0$) かつ $J_\varepsilon(\vec{v}) \geq 0$ ($\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}} \leq \rho_0$).
$(\mathrm{MP3})_\varepsilon$ ε によらない $\vec{e} \in \mathbb{H}$ が存在して $J_\varepsilon(\vec{e}) < 0$.

汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ と J_ε は次の意味で (PS)–条件をみたしている:

命題 4.3. (i) $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ を $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) \to c(\vec{\lambda})$ かつ $\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) \to 0$ かつ $\|v_{jn-}\|_{L^3} \to 0$ となる列とする. このとき, 部分列をとれば $\vec{v}_0 \in \mathbb{H}$ と $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\vec{v}_n(\cdot + z_n) \to \vec{v}_0 \quad \text{in } \mathbb{H}.$$

(ii) $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ を $\{J_\varepsilon(\vec{v}_n)\}_{n=1}^\infty$ が有界かつ $J'_\varepsilon(\vec{v}_n) \to 0$ かつ $\|v_{jn-}\|_{L^3} \to 0$ となる列とする. このとき, 部分列をとれば $\vec{v}_0 \in \mathbb{H}$ が存在して

$$\vec{v}_n \to \vec{v}_0 \quad \text{in } \mathbb{H}.$$

5 $1 < p < 2$ での困難点

$q = \min\{2, p\}$ とおく. $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ を $\{\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)\}$ が有界かつ $\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) \to 0$ となる近似解の列とする. このとき

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) - \frac{1}{q+1}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n] &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|\vec{v}_n\|_{\vec{\lambda}}^2 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\sum_{j=1}^3 \mu_j \|v_{jn}\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\quad + 3\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{3}\right)\alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_{1n}v_{2n}v_{3n}\,dy.\end{aligned} \tag{11}$$

$p \geq 2$ のとき $q = 2$ となるから, (11) は

$$\begin{aligned}O(1) + o(1)\|\vec{v}_n\|_{\mathbb{H}} &= \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) - \frac{1}{3}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n] \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\|\vec{v}_n\|_{\vec{\lambda}}^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{p+1}\right)\sum_{j=1}^3 \mu_j \|v_{jn}\|_{L^{p+1}}^{p+1}\end{aligned}$$

となる. ここで $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>0$, $\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{p+1}\geq 0$. したがって $\{\vec{v}_n\}$ が $\mathbb{H}$ で有界であることが容易にわかる. しかし $1<p<2$ のときは $q=p$ であり (11) は

$$\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)-\frac{1}{p+1}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n]\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|\vec{v}_n\|^2_{\vec{\lambda}}+3\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{3}\right)\alpha\int_{\mathbb{R}^N}v_{1n}v_{2n}v_{3n}\,dy$$

となる. 3 波相互作用の項の符号が負になることもありうるため, $\{\vec{v}_n\}$ の $\mathbb{H}$ での有界性を得ることが困難であった. そこで我々は $\|v_{jn-}\|_{L^3}\to 0$ となる近似解の列を構成し

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_{1n}v_{2n}v_{3n}\,dy\geq o(1)\|\vec{v}_n\|^2_{\mathbb{H}}\quad\text{as } n\to\infty.$$

となることを利用して,

$$\begin{aligned}O(1)+o(1)\|\vec{v}_n\|_{\mathbb{H}}&=\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)-\frac{1}{p+1}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n]\\ \geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|\vec{v}_n\|^2_{\vec{\lambda}}+o(1)\|\vec{v}_n\|^2_{\mathbb{H}}&\geq\left\{C\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)+o(1)\right\}\|\vec{v}_n\|^2_{\mathbb{H}}\end{aligned}$$

を示した. ここで $\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}>0$ であり, C は正定数であるから $\{\vec{v}_n\}$ の $\mathbb{H}$ での有界性が得られる.

6　主結果 2.1 の証明の概略

(6) より 0 は Λ 内での $c(\vec{V}(x))$ の最小点であることに注意する. $\Phi_{\vec{V}(0)}$ の moutain pass 構造 (補題 4.1) より次のような近似解の列 $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{H}$ が存在する:

$$\Phi_{\vec{V}(0)}(\vec{v}_n)\to c(\vec{V}(0)),\quad \Phi'_{\vec{V}(0)}(\vec{v}_n)\to 0,\quad \|v_{jn-}\|_{L^3}\to 0.$$

このとき命題 4.3 (i) より, 部分列をとれば, ある $\vec{\omega}_0\in\mathbb{H}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^N$ が存在して

$$\vec{v}_n(\cdot+y_n)\to\vec{\omega}_0\quad\text{in }\mathbb{H}.$$

このとき $\vec{\omega}_0$ は $(\mathcal{P}^{\vec{V}(0)})$ の非負の mouontain pass solution になる. J_ε に対する mountain pass value を次のように定義する:

$$\begin{aligned}&c_\varepsilon=\inf_{\vec{\gamma}\in\Gamma_\varepsilon}\max_{t\in[0,1]}J_\varepsilon(\vec{\gamma}(t)),\\ &\Gamma_\varepsilon=\{\vec{\gamma}\in C([0,1];\mathbb{H})\mid\vec{\gamma}(0)=\vec{0},\quad\vec{\gamma}(1)=T_0\vec{\omega}_0\}.\end{aligned}$$

ここで $T_0>0$ は $\Phi_{\vec{V}(0)}(T_0\vec{\omega}_0)<0$ となるもの (このとき, 十分小さい $\varepsilon_0>0$ が存在して $J_\varepsilon(T_0\vec{\omega}_0)<0$ $(\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0])$ とできる). このとき J_ε の mountain pass 構造 (補題 4.2) より任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ に対して, 次のような近似解の列 $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{H}$ が存在する:

$$J_\varepsilon(\vec{v}_n)\to c_\varepsilon,\quad J'_\varepsilon(\vec{v}_n)\to 0,\quad\|v_{jn-}\|_{L^3}\to 0.$$

このとき部分列をとれば, ある $\vec{v}_\varepsilon\in\mathbb{H}$ が存在して

$$\vec{v}_n\to\vec{v}_\varepsilon\quad\text{in }\mathbb{H}.$$

このとき $v_{j\varepsilon} \geq 0$, $J_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon) = c_\varepsilon$, $J'_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon) = 0$ となる. $\vec{u}_\varepsilon(x) = \vec{v}_\varepsilon(x/\varepsilon)$ とおくと, これが求めるピーク解である. それを確かめるには次を示せばよい: $\vec{v}_\varepsilon$ に対して, ある $\varepsilon_n \to 0$ と $z_n \in \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\varepsilon_n z_n \to x_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \qquad \vec{v}_{\varepsilon_n}(y + z_n) \to \omega(y) \quad \text{in } \mathbb{H}. \tag{12}$$

ここで $x_0 \in \Lambda_0$ であり, $\vec{\omega}$ は $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ の非負の mountain pass solution である. このとき

$$\vec{u}_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + \varepsilon_n z_n) = \vec{v}_{\varepsilon_n}(y + z_n) \to \vec{\omega}(y) \quad \text{in } \mathbb{H}, \qquad \varepsilon_n z_n \in \Lambda \quad (n \text{ が十分大きいとき}).$$

(12) は, 次のように Concentration Compactness と $J_{\varepsilon_n}(\vec{v}_{\varepsilon_n})$ の上下からの評価を用いて示せる.

((12) の証明の概略) $\{\vec{v}_{\varepsilon_n}\}$ の $\mathbb{H}$ における有界性と Concentration Compactness より, 部分列をとれば, ある $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $\vec{\omega} \in \mathbb{H} \setminus \{\vec{0}\}$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\omega_j \geq 0, \qquad \vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \rightharpoonup \vec{\omega} \text{ weakly in } \mathbb{H}, \\
&v_{j\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \to \omega_j \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N, \qquad v_{j\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \to \omega_j \text{ in } L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ for all } 1 \leq r < 2^*.
\end{aligned}$$

部分列をとれば次のうちの 1 つが成り立つ:

(i) $|\varepsilon_n z_n| \to \infty$.
(ii) ある $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Lambda}'$ が存在して $\varepsilon_n z_n \to x_0$.
(iii) ある $x_0 \in \overline{\Lambda}' \setminus \Lambda_0$ が存在して $\varepsilon_n z_n \to x_0$.
(iv) ある $x_0 \in \Lambda_0$ が存在して $\varepsilon_n z_n \to x_0$.

汎関数 J_ε の修正の効果から (i) と (ii) は排除される. (iii) のとき

$$\begin{aligned}
c(\vec{V}(0)) \geq \limsup_{n\to\infty} c_{\varepsilon_n} &= \limsup_{n\to\infty} \left(J_{\varepsilon_n}(\vec{v}_{\varepsilon_n}) - \frac{1}{q+1} J'_{\varepsilon_n}(\vec{v}_{\varepsilon_n})[\vec{v}_{\varepsilon_n}] \right) \\
&\geq \Psi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}) - \frac{1}{q+1} \Psi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega})[\vec{\omega}] \\
&\geq c(\vec{V}(x_0)) > c(\vec{V}(0)).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\Psi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{v}) := \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2_{\vec{V}(x_0)} &- \chi(x_0) \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^3 \mu_j \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy \right) \\
&- (1 - \chi(x_0)) \left(\sum_{j=1}^3 \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} F(v_j)\, dy + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} G(v_1 v_2 v_3)\, dy \right).
\end{aligned}$$

これは矛盾. よって (iv) が成り立つ. $x_0 \in \Lambda_0$ より, $\chi(x_0) = 1$, $c(\vec{V}(x_0)) = c(\vec{V}(0))$ および $\Phi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}) = \Psi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}) = 0$ を得る. 先ほどの議論と同様にして

$$\begin{aligned}
&c_{\varepsilon_n} \to c(\vec{V}(0)) = \Phi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}), \\
&\|\vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n)\|^2_{\frac{1}{2}\vec{m}} \to \|\vec{\omega}\|^2_{\frac{1}{2}\vec{m}}
\end{aligned}$$

を得る. $\vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \rightharpoonup \vec{\omega}$ weakly in $\mathbb{H}$ と合わせて $\vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \to \vec{\omega}$ in $\mathbb{H}$ を得る.

((12) の証明の概略おわり)

ここで

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|v_{j\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

に注意する. ここで $\Lambda_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^N \mid \varepsilon y \in \Lambda\}$. このとき十分小さい ε に対して

$$|v_{j\varepsilon}(y)| \le \min\{\nu^{\frac{1}{p-1}}, \nu\} \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon).$$

(9)–(10) より $F(v_{j\varepsilon}) = \frac{1}{p+1}|v_{j\varepsilon}|^{p+1}$, $G(v_{1\varepsilon}v_{2\varepsilon}v_{3\varepsilon}) = v_{1\varepsilon}v_{2\varepsilon}v_{3\varepsilon}$. ゆえに

$$c_\varepsilon = J_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon) = I_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon), \quad 0 = J'_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon) = I'_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon).$$

すなわち, 十分小さい ε に対して $\vec{v}_\varepsilon$ は元の問題 $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の解になる.

参考文献

[1] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.*, **85** (1982), 549–561.

[2] M. Colin and T. Colin, *On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions*, Differential Integral Equations, **17** (2004), 297–330.

[3] M. Colin and T. Colin, *A numerical model for the Raman amplification for laser-plasma interaction*, J. Comput. Appl. Math., **193** (2006), 535–562.

[4] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, *Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 371–380.

[5] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, *Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire, **26** (2009), 2211–2226.

[6] M. del Pino and P.-L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **4** (1996), 121–137.

[7] A. Floer and A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal., **69** (1986), no. 3, 397–408.

[8] N. Ikoma and K. Tanaka, *A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **40** (2011), no. 3-4, 449–480.

[9] S. Le Coz, Standing waves in nonlinear Schrödinger equations, Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations, de Gruyter, Berlin, (2009), 151–192.

[10] T.-C. Lin and J. Wei, *Spikes in two-component systems of nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials*, J. Differential Equations, **229** (2006), 538–569.

[11] Yuki Osada, *A singular perturbation problem for a nonlinear Schrödinger system with three wave interaction*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. (2023), accepted.

[12] A. Pomponio, *Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, J. Math. Phys., **51** (2010), 093513, 20 pp.