

時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の解について

濱岡 小鈴

本研究では以下のポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の解について考える：

$$(1) \quad i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}\Delta u(t, x) = V(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, ポテンシャル $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数, $\partial_t u = \frac{\partial}{\partial t} u$, $\partial_{x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j} u$ ($j = 1, \dots, n$), $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ である.

ここで, 波束変換, Modulation 空間 $M^{p,q}$, Wiener-Amalgum 空間 $W^{p,q}$ を以下で定義する.

定義 1. (波束変換)

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に対し, 窓関数 φ による f の波束変換を, 以下で定める.

$$W_\varphi f(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy$$

定義 2. (Modulation 空間)

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$(2) \quad f \in M^{p,q} \Leftrightarrow \|f\|_{M^{p,q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_\varphi f(x, \xi)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

定義 3. (Wiener-Amalgum 空間)

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$(3) \quad f \in W^{p,q} \Leftrightarrow \|f\|_{W^{p,q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_\varphi f(x, \xi)|^q d\xi \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

先行研究 [1] では, 一般の p, q に対しては, ポテンシャルの増大度が 1 次以下のときの (1) の解の Modulation ノルムの評価が, $p = q$ のときは, ポテンシャルの増大度が 2 次以下のときの (1) の解の Modulation ノルムの評価が得られている.

そこで本研究では, ポテンシャルの増大度が劣 2 次で, 一般の p, q の場合の (1) の解の Modulation ノルムの評価を調べ, 次の結果を得た. $V(t, x)$ に次の仮定を課す.

仮定 1. $V(t, x)$ は各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $V(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ とする. このとき, $\epsilon > 0$ が存在して, 任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して

$$(4) \quad |\partial_x^\alpha V(t, x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{2-\epsilon-|\alpha|}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

をみたす.

主定理. 実数値関数 $V(t, x)$ は仮定 1 をみたすとする. また, $T > 0$, $C_T > 0$ が存在し, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $\varphi(t, x) = e^{\frac{1}{2}it\Delta}\varphi_0(x)$, $u_0(x) = u(0, x)$, $u(t, x)$ は (1) の $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ で解とする. このとき,

$$(5) \quad \|u(t, \cdot)\|_{M_{\varphi(t, \cdot)}^{p,q}} \leq C_T \|u_0\|_{W_{\varphi_0}^{p,q}} \quad (u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall t \in [-T, T])$$

が成り立つ. ただし, $1 \leq p \leq \infty$ とし, $p \geq \frac{n}{\epsilon}$ のとき $q \geq p$, $p < \frac{n}{\epsilon}$ のとき $p \leq q < \frac{np}{n-p\epsilon}$ とする.

参考文献

- [1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, J. Funct. Anal., **266**, 733–753 (2014).