ソボレフ空間上の水の波の方程式の解の存在について

井上　隼斗

水の波は古くから研究されてきた身近な流体運動である. 水の運動を特徴づける速度場と圧力場, 水面の形状に対する連立微分方程式を水の波の方程式と呼ぶ. 本研究の目的は以下に述べる水の波の方程式の初期値問題の解の存在について調べることである.

$x=(x_1,\dots,x_n)$ を水平方向, x_{n+1} を垂直方向の空間変数とし, $t\geq 0$ を時間変数とする. $X=(x,x_{n+1})$ とし, $\eta=\eta(x,t)$ は水位を表す実数値未知関数, $\Phi=\Phi(X,t)$ は速度ポテンシャル, $b=b(x)$ を水底を表す関数とする.
以下の方程式について考察する.

$$
(1)\quad \begin{cases}
\Delta\Phi=0, & in\ \Omega(t)=\{X\in\mathbb{R}^{n+1}|b(x)<x_{n+1}<1+\eta(t,x)\}\\
\partial_t\eta+\nabla\Phi\cdot\nabla\eta-\partial_{n+1}\Phi=0\ ,\ \partial_t\Phi+\dfrac{1}{2}|\nabla_X\Phi|^2+g\eta=0, & on\ \Gamma(t)=\{X\in\mathbb{R}^{n+1}|x_{n+1}=1+\eta(t,x)\}\\
N\cdot\nabla_X\Phi=0, & on\ \Sigma=\{X\in\mathbb{R}^{n+1}|x_{n+1}=b(x)\}\\
\eta(x,0)=\eta_0(x)\ ,\ \Phi(X,0)=\Phi_0(X), & X=(x,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}
\end{cases}
$$

ここで g は重力定数, N は水底方向の法ベクトル, $\partial_t u=\frac{\partial}{\partial t}u$, $\partial_j u=\frac{\partial}{\partial x_j}u$ $(j=1,\dots,n+1)$, $\nabla=(\partial_1,\dots,\partial_n)$, $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2$, $\nabla_X=(\partial_1,\dots,\partial_{n+1})$, $\Delta_X=\Delta+\partial_{n+1}^2$ である.

この方程式は自由境界問題であるため, 直接扱うことが難しい. そこで Dirichlet-Neumann 作用素 Λ を導入する.

定義 1. 速度ポテンシャルの水面上での値を $\phi(x,t):=\Phi(x,1+\eta(x,t),t)$ とする.η と b に対する適切な条件下で次の初期値問題に解が存在する.

$$
\begin{cases}
\Delta\Phi=0 & in\ \Omega(t)\\
\Phi=\phi & on\ \Gamma(t)\\
N\cdot\nabla_X\Phi=0, & on\ \Sigma
\end{cases}
$$

この解 Φ を用いて Dirichlet-Neumann 作用素 $\Lambda=\Lambda(\eta,b)$ を $\Lambda(\eta,b)\phi=(\partial_{n+1}\Phi-\nabla\eta\cdot\nabla\Phi)|_{\Gamma(t)}$ と定義する.

これを用いて方程式 (1) を次のように変形できる.

$$
(2)\quad \begin{cases}
\eta_t(x,t)-\Lambda(\eta,b)\phi=0 \quad in\ \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\
\phi_t(x,t)+\eta(x,t)+\dfrac{1}{2}|\nabla\phi(x,t)|^2-\dfrac{1}{2}(1+|\nabla\eta(x,t)|^2)^{-1}(\Lambda(\eta,b)\phi+\nabla\eta(x,t)\cdot\nabla\phi(x,t))^2=0 \quad in\ \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\
\eta(x,0)=\eta_0(x)\ ,\ \phi(x,0)=\phi_0(x)\quad x\in\mathbb{R}^n
\end{cases}
$$

これにより未知な領域 $\Omega(t)$ 上の問題は $\mathbb{R}^n$ 上の問題に帰着される. 本研究のポイントは Λ の性質を調べることに集約される. 参考文献 [2] に従って, $\nabla\phi_0\in H^{s+1}$, $\eta_0\in H^s$, $b\in C^\infty$ $(s>M$ で, M は n に依存する定数) のときの解の適切性の証明を理解しまとめた.

参考文献

[1] Tatsuo Iguchi, A Shallow water approximation for water waves,J.Math,2009,Vol 49,**3**,13–55

[2] David Lannes, Well-posedness of the water-waves equations, Journal of The American Mathematical Society,2005,Vol 18,**3**,605–654