

Lyapunov-type inequalities for (p, q) -Laplace equations

金柅宏之 (東京理科大学・田中研 M2)

第 191 回神楽坂解析セミナー 2024 年 2 月 24 日

本講演では次の (p, q) -Laplace 方程式に対する Lyapunov 不等式について得られた結果を報告する.

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = W(x)(\alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{L})$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) のなめらかな有界領域, $1 < q < p < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $W \in L^\gamma(\Omega)$ ($\gamma \in [1, \infty]$) は重み関数とする, ただし $\alpha = \beta = 0$ のとき (1) は非自明解を持たないのでここでは考えない. 以下では, $\|\cdot\|_s$ ($1 \leq s \leq \infty$) で通常の $L^s(\Omega)$ ノルムを表すこととする.

定義. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が任意の $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} W(x)(\alpha|u|^{p-2}uv + \beta|u|^{q-2}uv) \, dx$$

が成り立つとき, u は (L) の弱解であるという.

1 先行研究

Borg[2] によって, 次の Laplace 方程式

$$\begin{cases} u'' + W(x)u = 0 & \text{on } [0, L] \\ u(0) = 0 = u(L) \end{cases} \quad (1)$$

に対する Lyapunov 不等式

$$\int_0^L W(x) dx \geq \frac{4}{L} \quad (2)$$

が示され, Pinasco [6] によって, 次の 1 次元 p -Laplace 方程式 (ODE)

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + W(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{in } (0, L) \\ u(0) = 0 = u(L) \end{cases} \quad (3)$$

に対する Lyapunov 不等式, すなわち, (3) が非自明解を持つための W に対する必要条件

$$\int_0^L W(x) \, dx \geq \frac{2^p}{L^{p-1}} \quad (4)$$

が示された. この不等式は, $p = 2$ のときよく知られた Lyapunov 不等式を一般化させたものである.

1.1 p -Laplace 方程式 (PDE) に対する Lyapunov-type の不等式

最近では p -Laplace 方程式 (PDE)

$$\begin{cases} -\Delta_p u = W(x)|u|^{p-2}u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

に対する Lyapunov-type の不等式がいろいろな評価方法により得られている. 以下ではこれについて紹介する.

1.1.1 Edward-Hudson-Leckband による $\|W\|_\gamma$ の評価

記号. $1 \leq \sigma \leq p^* := \frac{pN}{N-p}$ ($N > p$), $1 \leq \sigma < \infty$ ($N = p$), $1 \leq \sigma \leq \infty$ ($N < p$) のとき

$$\lambda_{p,\sigma} := \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_\sigma^p} \mid 0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} > 0$$

と定義する. $\lambda_{p,\sigma}^{-\frac{1}{p}}$ は $W_0^{1,p}(\Omega)$ から $L^\sigma(\Omega)$ への埋め込みの最良定数 $\|u\|_\sigma \leq \lambda_{p,\sigma}^{-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p$ を与える.

定理 A ([4]). $\frac{N}{p} < \gamma \in [1, \infty]$ とする. (5) が非自明解を持つならば,

$$\|W_+\|_\gamma \geq \lambda_{p,\sigma}, \quad \sigma := \frac{p\gamma}{\gamma-1} \in [p, \infty]$$

が成り立つ.

1.1.2 Napol-Pinasco による $\|W\|_\gamma$ の評価

記号. Ω に内接する最も大きい球の半径 r_Ω を

$$r_\Omega := \max_{x \in \Omega} d_\Omega(x), \quad d_\Omega(x) := d(x, \Omega^c) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

で定義する.

定理 B ([3]). $W \geq 0$, $N < p$, $\gamma = 1$ とする. 方程式 (5) が非自明解を持つならば,

$$\|W\|_1 \geq C r_\Omega^{-\sigma}, \quad \sigma := p - N > 0$$

が成り立つ. ここで定数 C は $C = C(p, N) > 0$ である.

注意. $N = 1$, $r_\Omega = L$ のとき (4) に対応する.

定理 C ([3]). $\frac{N}{p} < \gamma \in (1, \infty]$ とする. 方程式 (5) が非自明解を持つならば,

$$\|W\|_\gamma \geq C r_\Omega^{-\sigma}, \quad \sigma := p - \frac{N}{\gamma} > 0$$

が成り立つ. ここで定数 C は W に依存しない.

1.2 p, q -Laplace 方程式 (PDE) の解の存在

p, q -Laplace 方程式(L)に対する非自明解の存在については, Motreanu-Tanaka[5] では, $\alpha = \beta, W \in L^\infty$ の場合, Bobkov-Tanaka[1] では, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \ W \equiv 1$ の場合に示されている.

2 主結果

記号. 結果を簡単に述べるため, 定数 α, β の符号に応じて

$$V(x) := \begin{cases} W_+(x) & \text{if } \alpha, \beta \geq 0 \\ W(x) & \text{if } \alpha \cdot \beta < 0 \\ W_-(x) & \text{if } \alpha, \beta \leq 0 \end{cases}$$

とおく. ただし $W_\pm(x) := \max\{\pm W(x), 0\}$ である.

2.1 最良定数を用いた $\|W\|_\gamma$ の評価

記号. $1 \leq \sigma \leq p^* := \frac{Np}{N-p} \ (N > p), \ 1 \leq \sigma < \infty \ (N = p), \ 1 \leq \sigma \leq \infty \ (N < p)$ のとき

$$\tilde{\lambda}_{q,\sigma} := \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_q^q}{\|u\|_\sigma^q} \mid 0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} > 0 \quad (6)$$

と定義する.

次の結果は [4] のアイデアを用いて得られた結果である.

定理 1. $(\frac{N}{p} <) \frac{N}{q} < \gamma \in [1, \infty]$ とする. 方程式 (L) が非自明解を持つならば,

$$\|V\|_\gamma \geq \min \left\{ \frac{\lambda_{p,\sigma_1}}{|\alpha|}, \frac{\tilde{\lambda}_{q,\sigma_2}}{|\beta|} \right\}, \quad \infty \geq \sigma_1 := \frac{p\gamma}{\gamma-1} \geq \sigma_2 := \frac{q\gamma}{\gamma-1} \geq q \quad (*)$$

が成り立つ.

命題 1. $(\frac{N}{p} <) \frac{N}{q} < \gamma \in (1, \infty]$ とする. 方程式 (L) が非自明解を持つならば, 定理 1の(*)で等号は成立しない.

2.2 内接球の半径 r_Ω を用いた $\|W\|_\gamma$ の評価

次の結果は [3] のアイデアを用いて得られた結果である.

定理 2. $N < q (< p)$, $\gamma = 1$ とする. 方程式 (L) が非自明解を持つならば,

$$\|V\|_1 \geq \frac{C}{\max\{|\alpha|r_\Omega^{\sigma_1}, |\beta|r_\Omega^{\sigma_2}\}}, \quad \sigma_1 := p - N > \sigma_2 := q - N > 0$$

が成り立つ. ここで定数 C は $C = C(p, q, N) > 0$ である.

定理 3. $(\frac{N}{p} <) \frac{N}{q} < \gamma \in (1, \infty]$ とする. 方程式 (L) が非自明解を持つならば,

$$\|V\|_\gamma \geq \frac{C}{\max\{|\alpha|r_\Omega^{\sigma_1}, |\beta|r_\Omega^{\sigma_2}\}}, \quad p \geq \sigma_1 := p - \frac{N}{\gamma} > \sigma_2 := q - \frac{N}{\gamma} > 0$$

が成り立つ. ここで定数 $C > 0$ は V に依存しない.

References

- [1] Vladimir Bobkov and Mieko Tanaka, *Remarks on minimizers for (p, q) -Laplace equations with two parameters*, Commun. Pure Appl. Anal. **17** (2018), no. 3, 1219–1253. MR 3809121
- [2] Göran Borg, *Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen*, Ark. Mat. Astr. Fys. **31A** (1944), no. 1, 31. MR 16803
- [3] Pablo L. de Nápoli and Juan P. Pinasco, *Lyapunov-type inequalities for partial differential equations*, J. Funct. Anal. **270** (2016), no. 6, 1995–2018. MR 3460232
- [4] Julian Edward, Steve Hudson, and Mark Leckband, *Existence problems for the p -Laplacian*, Forum Math. **27** (2015), no. 2, 1203–1225. MR 3334099
- [5] Dumitru Motreanu and Mieko Tanaka, *On a positive solution for (p, q) -Laplace equation with indefinite weight*, Minimax Theory Appl. **1** (2016), no. 1, 1–20. MR 3477893
- [6] Juan Pablo Pinasco, *Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p -Laplacian*, Abstr. Appl. Anal. (2004), no. 2, 147–153. MR 2058270