Cauchy problem of Zakharov system in one space dimension

小林 伸達 (東京理科大学)

空間 1 次元 Zakharov 系

$$(Z)\begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u + vu, \\ \partial_t v = -\partial_x w, \\ \partial_t w = -\partial_x v - \partial_x(|u|^2) \end{cases}$$

の初期値境界値問題を考える．$I \subset \mathbb{R}$ は開区間とし，(u, v, w) は $(t, x) \in \mathbb{R} \times I$ を変数とする未知関数であり，u は複素数値，v, w は実数値とする．また，境界条件は斉次 Dirichlet 条件とする．

Fourier 変換の議論が行えることから，$\mathbb{R}^N$ 上の Zakharov 系の初期値問題の適切性は多く研究されているが，一般領域における研究は少ない．本研究では，Ozawa-Tomioka [1] に基づいて，修正エネルギー法という Fourier 変換に依らない手法を用いることで方程式系 (Z) の適切性を考察した．

定理　任意の $(u_0, v_0, w_0) \in (H^2 \cap H_0^1)(I) \times H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ に対して，$(u(0), v(0), w(0)) = (u_0, v_0, w_0)$ を満たす (Z) の解 $(u, v, w) \in C(\mathbb{R}; (H^2 \cap H_0^1)(I) \times H_0^1(I) \times H_0^1(I)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(I) \times L^2(I) \times L^2(I))$ が一意的に存在し，以下が成り立つ．

(1)　質量とエネルギーが保存する．すなわち，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2},\ E(u(t), v(t), w(t)) = E(u_0, v_0, w_0).$$

ここで，$E(u, v, w) = \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}(\|v\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2) + (v, |u|^2)_{L^2}$.

(2)　$\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{H^1}$ にのみ依存する正定数 $C > 0$ が存在し，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\|u(t)\|_{H^2} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^1} \le C(1 + |t|^2).$$

(3)　$((u_0^n, v_0^n, w_0^n))_{n\in\mathbb{N}} \subset (H^2 \cap H_0^1)(I) \times H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ が

$$(u_0^n, v_0^n, w_0^n) \to (u_0, v_0, w_0) \ \text{ in } \ H^2(I) \times H^1(I) \times H^1(I)$$

を満たすとき，任意の $T > 0$，$s \in [0, 2)$，　$\sigma \in [0, 1)$ に対して，

$$(u_n, v_n, w_n) \to (u, v, w) \ \text{ in } \ C([-T, T]; H^s(I) \times H^\sigma(I) \times H^\sigma(I)).$$

ただし，(u_n, v_n, w_n) は (u_0^n, v_0^n, w_0^n) を初期値とする方程式系 (Z) の解である．

注意　(i)　解の評価 (2) に関して，空間 2 次元の場合，$\|u(t)\|_{H^2} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^1} \le C\exp(C|t|)$ という結果が [1] で得られていた．
(ii)　[1] では u の属するクラスが $(H^2 \cap H_0^1)(I)$ に値をとる弱連続な関数までしか得られていなかったが，これを $(H^2 \cap H_0^1)(I)$ に値をとる連続な関数まで強めることができた．

参考文献

[1]　T. Ozawa and K. Tomioka, *Zakharov system in two space dimensions*, Nonlinear Anal. **214** (2022), Paper No. 112532, 20 pp.