

Global solvability and immediate regularization of distributions in a flux-limited Keller–Segel system

小波津 晶平 (東京理科大・理 M2)*

次の走化性方程式系の初期値境界値問題について考える:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\frac{u}{(1 + |\nabla v|^2)^\alpha} \nabla v \right) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0, v(\cdot, 0) = v_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル, $\alpha > 0$ とし, u_0, v_0 はともに非負の初期値とする.

本研究の目的は, 正則性が低い初期値から時間大域的で滑らかな解を構成する (解の即時正則化) ことである.

問題 (1) における解の即時正則化について, 次の結果を得た.

主結果

$n \in \mathbb{N}$, $\alpha > \alpha_c := \begin{cases} \frac{n-2}{2(n-1)} & (n \geq 2), \\ 0 & (n = 1) \end{cases}$ とする. このとき, 非負の初期値 $u_0 \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$,

$v_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ ($q \in (\max\{1, (1-2\alpha)n\}, \frac{n}{n-1})$) に対し, 問題 (1) の時間大域的古典解 $(u, v) \in (C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)))^2$ が存在して

$$\int_{\Omega} u(\cdot, t) = \mu_0(\mathbf{1}) \quad (t > 0)$$

を満たし, さらに

$$u(\cdot, t) \xrightarrow{*} u_0 \quad \text{in } \mathcal{M}(\overline{\Omega}), \quad v(\cdot, t) \rightarrow v_0 \quad \text{in } W^{1,q}(\Omega) \text{ as } t \searrow 0$$

が成り立つ.

注意. 問題 (1) において第 2 方程式が楕円型の場合, $n \geq 2$ で $\alpha < \alpha_c$ のときは有限時刻で爆発する解の存在が示されている ([1]).

参考文献

- [1] M. Winkler. A critical blow-up exponent for flux limitation in a Keller–Segel system. *Indiana Univ. Math. J.*, 71(4):1437–1465, 2022.

* e-mail: sho.kht.jp@gmail.com