

離散時間における 1 次元 2 状態量子ウォークの極限定理

高 裕貴

量子ウォークは、古典ランダムウォーク (以下 ”ランダムウォーク” とする) の量子版として研究されている数理モデルである。本研究では、時刻 $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ において $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 上を移動する量子ウォークについて考える。

時刻 $n = 0, 1, 2, \dots$ での量子ウォークの確率振幅を Ψ_n と表す。確率振幅とは、絶対値の 2 乗をとると確率になる値のことである。確率振幅 Ψ_n を以下で定義する。また、 X_n を量子 walker の時刻 n での場所とする。時刻 n で量子 walker が場所 x にいる確率 $P(X_n = x)$ は以下である。

$$\Psi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2 ; x \mapsto \Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_n^L(x) \\ \Psi_n^R(x) \end{bmatrix}, \quad P(X_n = x) = |\Psi_n(x)|^2 = \left| \Psi_n^L(x) \right|^2 + \left| \Psi_n^R(x) \right|^2$$

$\Psi_n(x)$ の時間発展を以下で定義する。

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} {}^t[\alpha & \beta] (x=0) \\ {}^t[0 & 0] (x \neq 0) \end{cases}, \quad \Psi_{n+1}(x) = P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1)$$

t は転置作用素を意味する。 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を仮定している。また P, Q は時間発展作用素と呼ばれ、以下で定義される。

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

$U = P + Q$ と定義すると、 U は unitary である。以下に時間発展を描いた。

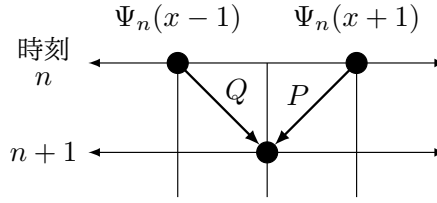


図 1 時間発展

つまり、 P, Q はそれぞれがランダムウォークの左に移動する確率 p , 右に移動する確率 q に対応している。式 (1), (2) のモデルに関する量子ウォークの中心極限定理を記す。

定理 ([1], 定理 3.3). $abcd \neq 0$ を満たす量子ウォークに対し、以下が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n/n \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) I_{(-|a|, |a|)}(y) dy$$

ただし、

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{|a|^2-x^2}} \left[1 - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta}{|a|^2} \right) x \right] \quad (0 < |a| < 1)$$

I_A は定義関数である。[2] では以下の時間発展を考えており、その場合の極限定理を示している。

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} {}^t[\alpha & \beta] (x=0) \\ {}^t[0 & 0] (x \neq 0) \end{cases}, \quad \Psi_{n+1}(x) = \begin{cases} P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1) & (n \neq \tau) \\ P_1\Psi_n(x+1) + Q_1\Psi_n(x-1) & (n = \tau) \end{cases}, \quad \text{ただし, } \tau \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

ただし, $\theta \in [0, 2\pi]$ ($\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$), $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ である. 本研究では式 (1) の時間発展を踏襲し, $\theta = \pi/4$, $\theta_1 = 0$, 第 1 列に i をかけた以下の時間発展作用素 P, Q, P_1, Q_1 で考察し, $P(X_{2\tau+1} = x), P(X_{2\tau+2} = x), P(X_n/n \leq x)$ の極限定理を得た.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

定理 1. 奇数時刻のみ記す.

$n = 2\tau + 1$ のとき,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P(X_{2\tau+1} = x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \{|\alpha|^2 + (\sqrt{2}-1)^2|\beta|^2 + 1 + i(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(2-\sqrt{2})\} & (x=1) \\ \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \{|\beta|^2 + (\sqrt{2}-1)^2|\alpha|^2 + 1 - i(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(2-\sqrt{2})\} & (x=-1) \\ \frac{(\sqrt{2}-1)^{2|x|}}{2} \{(\sqrt{2}+1)^2|\alpha|^2 + (\sqrt{2}-1)^2|\beta|^2 + 1 + 2\sqrt{2}i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})\} & (x=3, 5, 7, \dots) \\ \frac{(\sqrt{2}-1)^{2|x|}}{2} \{(\sqrt{2}+1)^2|\beta|^2 + (\sqrt{2}-1)^2|\alpha|^2 + 1 - 2\sqrt{2}i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})\} & (x=-3, -5, -7, \dots) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

定理 2.

$n = 2\tau + 1, 2\tau + 2$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$\begin{aligned} f(x) = & \Delta \delta_0(x) + \frac{x}{2\pi|x|(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} \\ & \times \left\{ \left| A_1(h^{-1}(-x)) \right|^2 + \left| A_1\left(-\frac{\pi}{2} - h^{-1}(-x)\right) \right|^2 \right. \\ & \left. - \left| A_2(h^{-1}(x)) \right|^2 - \left| A_2\left(-\frac{\pi}{2} - h^{-1}(x)\right) \right|^2 \right\} I_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(x) \end{aligned}$$

$\delta_0(x)$ は原点でのデルタ測度である. また, $I_A(x)$ は定義関数である.

系. 以下の関係式が成り立つ.

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} P(X_{2\tau+1} = x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} P(X_{2\tau+2} = x) = \Delta = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

参考文献

- [1] 今野 紀雄, 量子ウォーク, 森北出版株式会社 (2014)
- [2] TAKUYA MACHIDA, Limit theorems for a localization model of 2-state quantum walks, Int. J. Quantum Inf. 9 (2011), no. 3, 863–874