

ミッシング・タームを伴う 重み付き Sobolev–Poincaré 型不等式

小川健一郎 (東京理科大学・M2)

第 191 回神楽坂解析セミナー 2024 年 2 月 24 日

符号変化を許容する重みを付けた Sobolev–Poincaré 型不等式

$$(WSP) \quad \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \geq C \left(\int_{\Omega} W(x)|u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \quad \text{for } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{with } \int_{\Omega} W(x)|u|^q dx \geq 0$$

の最良定数を

$$\lambda_{p,q}^W := \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p}{\left(\int_{\Omega} W(x)|u|^q dx \right)^{p/q}} : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} W(x)|u|^q dx > 0 \right\}$$

とおく. ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) の有界領域, $p, q \in (1, \infty)$, $W \in L^\gamma(\Omega)$ ($\gamma \in [1, \infty]$) は

$$\int_{\Omega} W_+ dx > 0$$

および

$$N > p \text{ のとき } \max\{p, q\}\gamma' < p^* := \frac{Np}{N-p}, \quad N = p \text{ のとき } \gamma > 1$$

を満たすものとする. ただし, $W_+ := \max\{0, W\}$ であり, γ' は γ の Hölder 指数を表す. 先行研究 [2] などにおいて, (WSP) で $p = q$, $W \equiv 1$ とした Poincaré の不等式にミッシング・ターム (missing term) を含めた不等式が示されているが, 最近それが次のように一般化された.

定理 ([1]) $N \geq 2$ のとき Ω の境界は $C^{1,\sigma}$ 級 ($\sigma \in (0, 1)$) であるとし, $p \geq q \geq 2$, $p > 2$ とする. このとき, ある $C = C(p, q, \Omega) > 0$ が存在して任意の $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \lambda_{p,q} \|u\|_{L^q(\Omega)}^p \geq C \left(|u_q|^p \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^{p-2} |\nabla u_q^\perp|^2 dx + \|\nabla u_q^\perp\|_{L^p(\Omega)}^p \right).$$

が成り立つ. ここで, $\phi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ は $\lambda_{p,q} := \lambda_{p,q}^1 \in (0, \infty)$ の正值最小化関数である. また, 各 $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$v_q^\parallel := \frac{\int_{\Omega} \phi_1^{q-1} v dx}{\|\phi_1\|_{L^q(\Omega)}^q} \in \mathbb{R}, \quad v_q^\perp := v - v_q^\parallel \phi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

と定義し, $v = v_q^\parallel \phi_1 + v_q^\perp$ という $L^q(\Omega)$ における分解を表している.

本研究の目的は, $W \equiv 1$ とは限らない重み付き Sobolev–Poincaré 型不等式 (WSP) に対して (一般に p, q の大小関係も仮定せずに), 上の定理と同様の不等式を得ることである. まず, その過程で必要となる次の事実を示した.

命題 1 (i) $\lambda_{p,q}^W$ の最小化関数 $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が存在して, $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$ となる.

(ii) $p \geq q$ のとき, $\lambda_{p,q}^W$ は単純である. すなわち, $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が $\lambda_{p,q}^W$ の最小化関数ならば, u と v は線形従属である.

命題 2 $D \subset \mathbb{R}^2$ を

$$D := \begin{cases} \left\{ (s, t) \in (p\gamma', p^*] \times [q\gamma', p^*] : t > \frac{s(q-p)}{s-p\gamma'}\gamma' \right\} & \text{if } N > p; \\ \left\{ (s, t) \in (p\gamma', \infty) \times [q\gamma', \infty) : t > \frac{s(q-p)}{s-p\gamma'}\gamma' \right\} & \text{if } N \leq p, \end{cases}$$

で定める. このとき, 任意の $(s, t) \in D$ に対して $C = C(p, q, \gamma, s, t, \Omega) > 0$ が存在して

$$\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\lambda\|W\|_{L^\gamma(\Omega)})^\alpha \|\varphi_1\|_{L^t(\Omega)}^\beta$$

が成り立つ. ここで, $\alpha := \frac{s\gamma'}{t(s-p\gamma') - s(q-p)\gamma'}$, $\beta := \frac{t(s-p\gamma')}{t(s-p\gamma') - s(q-p)\gamma'}$ である.

これらの $\lambda_{p,q}^W$ に関する基本性質をもとに, 次の結果を得た.

命題 3 $p \geq 2$ とし, $\lambda_{p,q}^W$ は単純であるとする. このとき, 各 $\rho > 0$ に対してある $C = C(p, q, W, \Omega, \rho) > 0$ が存在して, 任意の $u \in \mathcal{D}_\rho$ に対して $\int_\Omega W|u|^q dx > 0$ ならば

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \lambda_{p,q}^W \left(\int_\Omega W|u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \geq C \left(|L(u)|^{p-2} \int_\Omega |\nabla \varphi_1|^{p-2} |\nabla P(u)|^2 dx + \|\nabla P(u)\|_p^p \right).$$

が成り立つ. ここで, 各 $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$L(v) := \int_\Omega W\varphi_1^{q-1}v dx, \quad P(v) := v - L(v)\varphi_1$$

と定義し ($W_0^{1,p}(\Omega) = \mathbb{R}\varphi_1 \oplus \text{Ker } L$ という分解を表している), 各 $\rho > 0$ に対して

$$\mathcal{D}_\rho := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|\nabla P(u)\| \geq \rho|L(u)|\}$$

とおいた.

参考文献

- [1] Vladimir Bobkov and Sergey Kolonitskii, *Improved Friedrichs inequality for a subhomogeneous embedding*, J. Math. Anal. Appl. **527** (2023), no. 1, Paper No. 127383, 29. MR 4591730
- [2] Jacqueline Fleckinger-Pellé and Peter Takáč, *An improved Poincaré inequality and the p -Laplacian at resonance for $p > 2$* , Adv. Differential Equations **7** (2002), no. 8, 951–971. MR 1895113