

# Green-Naghdi 方程式の適切性

鳥海 遼太郎

本研究では浅水波方程式の中でも、4 次の高次近似として導かれた Green-Naghdi 方程式の適切性について考える。1 次元の Green-Naghdi 方程式の形は以下のようになる。

$$(1) \quad \begin{cases} \eta_t + \partial_x((h + \eta)u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u_t + uu_x + g\eta_x = \frac{1}{3(h + \eta)} \partial_x[(h + \eta)^3(u_{xt} + uu_{xx} - (u_x)^2)], & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ (\eta(x, 0), u(x, 0)) = (\eta_0, u_0), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ただし、 $x$  を水平方向の空間変数、 $t \geq 0$  を時間変数とする。 $\eta = \eta(x, t)$  は水位を表す実数値未知関数、 $u = u(x, t)$  を水中の速度場の水平成分とする。 $g$  は重力定数、 $h$  は水底から水面の基準値までの高さ、 $\partial_t u = u_t$ 、 $\partial_x u = u_x$

適切性とは、初期条件を与えたときに解が一意に存在し、初期条件の変動に関して解が連続的に依存する性質のことである。

Green-Naghdi 方程式の解  $(\eta, u) \in C([0, T], H^s \times H^{s+1})$  ( $s > \frac{3}{2}$ ) に対して、 $\mathcal{L} = 1 + \eta - \partial_x(1 + \eta)^3 \partial_x$  を定義する。(1) をスケール変換 (無次元化) し、この作用素を用いて書き換えると次のようになる。

$$(2) \quad \begin{cases} \eta_t + \partial_x((1 + \eta)u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u_t + uu_x + \mathcal{L}^{-1} \partial_x[\eta + \frac{\eta^2}{2} + 2(1 + \eta)^3 u_x^2] = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ (\eta(x, 0), u(x, 0)) = (\eta_0, u_0), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**主定理.**

$s > \frac{3}{2}$  とする。 $\inf_{x \in \mathbb{R}}(1 + \eta_0(x)) > 0$  を満たす初期値  $(\eta_0, u_0) = (\eta(x, 0), u(x, 0)) \in Y = H^s(\mathbb{R}) \times H^{s+1}(\mathbb{R})$  に対して、(2) の初期値問題は任意の  $t \in [0, T]$  に対して、 $C([0, T], Y)$  に属し、不等式  $\inf_{x \in \mathbb{R}}(1 + \eta(x, t)) > 0$  を満たす一意解  $(\eta(x, t), u(x, t))$  を持つような  $T > 0$  が存在する。すなわち時間局所適切である。

さらに、初期値と初期値問題の一意解との対応は、 $V = \{(\eta, u) \in Y : \inf_{x \in \mathbb{R}}(1 + \eta(x)) > 0\}$  から  $C([0, T], V)$  への連続写像である。

先行研究 [1] では、[2] の定理を用いて主定理の証明を行っていた。その証明を詳細に補完し、Green-Naghdi 方程式の適切性についてまとめた。

## 参考文献

- [1] Yi A.Li: A shallow-water approximation to the full water wave problem, Communications on pure and applied mathematics, 2006, Vol 59, 9, 1225-1285
- [2] Kato.T: Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, Spectral theory and differential equations, 1975, 25-70