

# Well-posedness in modulation spaces for Schrödinger equations with rough short-range magnetic fields

村松 亮 (東京理科大学)\*

## 1 導入

本研究では, 以下の磁場中の Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}(\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

ただし,  $u(t, x)$ ,  $u_0(x)$  はそれぞれ  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  についての複素数値関数であり,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ ,  $\mathbf{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  で,  $\mathbf{a}(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_n(t, x))$  とし,  $(\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t, x))^2$  である. さらに,  $\mathbf{a}(t, x)$  には以下の仮定を課す.

**仮定 A.** 各  $j = 1, \dots, n$  に対し,  $a_j(t, x)$  は  $t$  に関して  $C^1$ ,  $x$  に関して  $C^3$  級であり,  $\rho < 0$  が存在して任意の多重指数  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  に対し, 以下が成立:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\partial_x^\alpha a_j(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{\rho - |\alpha|}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

**定義 1.1** (波束変換).  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ ,  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  とする. このとき, 窓関数  $\varphi$  による  $f$  の波束変換  $W_\varphi f$  を, 以下で定める:

$$W_\varphi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y - x)} f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

**定義 1.2** (モジュレーション空間).  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$  とする. このとき,  $1 \leq p, q \leq \infty$  に対し, モジュレーション空間  $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  を以下のように定義する:

$$M^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{M_\varphi^{p,q}} \equiv \| \|W_\varphi f(x, \xi)\|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} < \infty \right\}.$$

また, 急減少関数の空間  $\mathcal{S}$  をモジュレーションノルム  $\|\cdot\|_{M_\varphi^{p,q}}$  で完備化した空間を  $\mathcal{M}^{p,q}$  とする.  $1 \leq p, q < \infty$  のとき,  $M^{p,q} = \mathcal{M}^{p,q}$  である.

## 2 主結果

本研究では, 磁場中の Schrödinger 方程式 (1) に対し, 波束変換を用いたパラメトリクスを構成することで, モジュレーション空間における方程式 (1) の適切性を示した.

**主定理.**  $\mathbf{a}(t, x)$  は仮定 A をみたすとし,  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $u_0 \in \mathcal{M}^{p,q}$  とする. このとき, 方程式 (1) は  $\mathcal{M}^{p,q}$  上適切である. すなわち, (1) をみたす  $u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M}^{p,q})$  がただ一つ存在し, さらに任意の  $T > 0$  に対してある  $C_T > 0$  が存在して,

$$\|u(t, \cdot)\|_{M_\varphi^{p,q}} \leq C_T \|u_0\|_{M_\varphi^{p,q}}, \quad t \in [-T, T] \quad (2)$$

が成立する.

Cordero–Nicola–Rodino[2] では, スカラーポテンシャル付きの Schrödinger 方程式を含む分散型方程式のモジュレーション空間における適切性を, パラメトリクスを構成して示している. しかしこの結果は, 磁場中の Schrödinger 方程式のように一階微分に変数係数が含まれるものに対しては適用できない. 本研究の主定理は, [2] の結果を  $\mathbf{a}(t, x)$  が比較的良好な関数である場合に磁場中の Schrödinger 方程式に対して拡張したものである.

\*e-mail: rmuramatsu@rs.tus.ac.jp

### 3 証明の概略

[2] の手法に倣い, パラメトリクス  $\tilde{S}(t, s)$  を

$$\tilde{S}(t, s)f(y) = \iint e^{i\Psi(t, s, x, \xi)} g(t - s, y - X(t)) e^{i(y - X(t)) \cdot \Xi(t)} W_g f(X(s), \Xi(s)) dx d\xi$$

とする. ここで  $X(\tau) = X(\tau; 0, x, \xi)$ ,  $\Xi(\tau) = \Xi(\tau; 0, x, \xi)$ ,  $\Psi(t, s, x, \xi)$  は

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = \Xi(\tau) - \mathbf{a}(\tau, X(\tau)), & X(0) = x, \\ \dot{\Xi}(\tau) = -\text{tr}(\nabla_x \mathbf{a})(\tau, X(\tau))(\Xi(\tau) - \mathbf{a}(\tau, X(\tau))), & \Xi(0) = \xi, \end{cases}$$

$$\Psi(t, s, x, \xi) = \int_s^t \frac{1}{2} (|\Xi(\tau)|^2 - |\mathbf{a}(\tau, X(\tau))|^2) d\tau, \quad g(t, \cdot) = e^{it\Delta/2} g(\cdot)$$

で定める. ただし  $\dot{a} = \frac{d}{d\tau} a$ . これより

$$\begin{aligned} & \left( i\partial_t + \frac{1}{2}(\nabla_y - i\mathbf{a}(t, y))^2 \right) \tilde{S}(t, s)f(y) \\ &= \iint \left( -\frac{1}{2}R^{(2)}[\mathbf{a}^2](t, y, X(t)) - i\mathbf{R}^{(1)}[\mathbf{a}](t, y, X(t)) \cdot \nabla_y - \frac{i}{2}(\text{div} \mathbf{a})(t, y) \right) \\ & \quad \times g(t - s, y - X(t)) e^{i\Psi(t, s, x, \xi)} e^{i(y - X(t)) \cdot \Xi(t)} W_g f(X(s), \Xi(s)) dx d\xi \\ &+ \iint \mathbf{R}^{(2)}[\mathbf{a}](t, y, X(t)) \cdot \Xi(t) e^{i(y - X(t)) \cdot \Xi(t)} \\ & \quad \times g(t - s, y - X(t)) e^{i\Psi(t, s, x, \xi)} W_g f(X(s), \Xi(s)) dx d\xi \\ &\equiv K^1(t, s)f(y) + K^2(t, s)f(y) \end{aligned}$$

となる.  $K(t, s) \equiv K^1(t, s) + K^2(t, s)$  が  $0 \leq |t - s| \leq T$  に対し  $\mathcal{M}^{p, q}$  上有界作用素ならば, Volterra 型積分方程式

$$v(t) = -K(t, 0)u_0 - i \int_0^t K(t, s)v(s)ds$$

の (一意) 解  $v(s) \in C([0, T]; \mathcal{M}^{p, q})$  を用いて解作用素を

$$U(t, 0)u_0 = \tilde{S}(t, 0)u_0 + i \int_0^t \tilde{S}(t, s)v(s)ds$$

と定めればよい. したがって  $K(t, s)$  の有界性が焦点となるが, これを示す際に次の基本的な特性曲線の評価式を用いる:

**補題 3.1.**  $\delta > 0$  とする. 十分小さい  $0 < T < 1$  と  $T$  に依存しない定数  $C_\delta > 0$  が存在して, 任意の  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  に対して次が成立する:

$$\int_0^T \langle X(\tau) \rangle^{-1-\delta} |\Xi(\tau)| d\tau \leq C_\delta(1 + T).$$

#### 参考文献

- [1] Bényi, A., Gröchenig, K., Okoudjou, K.A., Rogers, L.G.: Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces, *Journal of Functional Anal.*, **246**, 366–384 (2007).
- [2] Cordero, E., Nicola, F., Rodino, L., Schrödinger equations with rough Hamiltonians, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **35**, 4805–4821 (2015).
- [3] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, *Tohoku Math.J.*, **64**, 223–231 (2012).
- [4] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, *Journal of Functional Anal.*, **266**, 733–753 (2014).