

消散構造を伴う非線形 Klein–Gordon 方程式の 解の減衰評価

西井 良徳 (東京理科大学)*

次の非線形 Klein–Gordon 方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} (\square + 1)u = F(u, \partial_t u, \partial_x u), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $u = u(t, x)$ は実数値未知関数である. 初期値 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はコンパクト台をもつ滑らかな関数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいパラメータ, 非線形項 F は $(u, \partial_t u, \partial_x u)$ に関する 3 次斉次多項式であると仮定する.

空間 1 次元において 3 次の非線形項は, 解の長時間挙動について臨界的な状況を与えることが知られている ([6], [4], [8], [5], [2] 等). 非線形項 F の構造条件を導入するために函数 $K_F = K_F(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$K_F(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, -\cosh z \sin \theta, \sinh z \sin \theta) e^{-i\theta} d\theta$$

により定める. このとき, Delort [1] により

$$\operatorname{Re} K_F(z) \equiv 0, \quad (\mathbf{A}_0)$$

Sunagawa [7] で, より一般的な条件

$$\inf_{z \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} K_F(z) \geq 0 \quad (\mathbf{A})$$

の下で十分小さい ε に対する (1) の一意解の時間大域的存在が示され, さらに, ある滑らかな複素数値関数 a が存在して, $t \rightarrow +\infty$ において $x \in \mathbb{R}$ について一様に

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\operatorname{Re} \left[a(x/t) \exp \left(i(t^2 - |x|^2)_+^{1/2} - i\Psi_F(x/t) |a(x/t)|^2 \int_0^{\log t} \frac{d\sigma}{1 + 2\Phi_F(x/t) |a(x/t)|^2 \sigma} \right) \right]}{\sqrt{1 + 2\Phi_F(x/t) |a(x/t)|^2 \log t}} \\ & + O(t^{-1/2} (\log t)^{-3/2}) \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つことが示された. ここで, $(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$, $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} \Phi_F(y) &:= (1 - y^2)^{1/2} \operatorname{Re} [K_F(\tanh^{-1} y)], \\ \Psi_F(y) &:= (1 - y^2)^{1/2} \operatorname{Im} [K_F(\tanh^{-1} y)]. \end{aligned}$$

(A) の下での解の時間減衰について考える. $(\mathbf{A}_0)$ が満たされる場合, (1) の解の L^p ノルム ($2 \leq p \leq \infty$) は線形解と同じ $O(t^{-(1/2-1/p)})$ で減衰する. $(\mathbf{A}_0)$ が満たされない場合, (2) の分母の $\log t$ の係数に注目すれば非線形項が消散的に働き, (1) の解は線形解より

* e-mail: yoshinori.nishii@rs.tus.ac.jp

速く減衰することが期待できる. 実際, (1) の解の L^p ノルムに対して Kim-Sunagawa [3] で次が示された: 正定数 C_0 が存在し, 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname{Re} K_F(z) \geq C_0 \cosh^3 z \quad (\mathbf{B}_0)$$

ならば, $t \rightarrow +\infty$ において $\sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial_{t,x}^\alpha u(t)\|_{L^p} = O(t^{-(1/2-1/p)}(\log t)^{-1/2})$ が成り立つ. 正定数 C_1 が存在し, 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname{Re} K_F(z) \geq C_1 \cosh z \quad (\mathbf{B}_1)$$

ならば, $t \rightarrow +\infty$ において $\|u(t)\|_{L^p} = O(t^{-(1/2-1/p)}(\log t)^{-1/2})$ が成り立つ.

($\mathbf{B}_0$), ($\mathbf{B}_1$) が満たされる場合には $\inf_{z \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} K_F(z) > 0$ が成立するため, ($\mathbf{A}$) の下での解の L^p ノルムの減衰評価は完全には得られていない. 本講演では ($\mathbf{A}$) の下での (1) の時間大域解について, ($\mathbf{A}_0$), ($\mathbf{B}_0$) が満たされない場合の減衰評価について考える. 次が主結果である.

定理 1. ($\mathbf{B}_1$) を仮定し, ε は十分小さいとする. このとき, 正定数 C が存在して, (1) の解 $u(t)$ は $t \geq 0$ において次を満たす:

$$\sum_{|l|=1} \|\partial_{t,x}^l u(t)\|_{L^p} \leq \begin{cases} C(\log t)^{-1/2}(\log \log(1+t))^{1/2}, & p = 2, \\ C(1+t)^{-(1/2-1/p)}(\log t)^{-1/p}, & 2 < p \leq \infty. \end{cases}$$

定理 2. 正定数 C_2 が存在し, 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname{Re} K_F(z) \geq \frac{C_2}{\cosh z} \quad (\mathbf{B}_2)$$

が成り立つと仮定し, ε は十分小さいとする. このとき, 正定数 C が存在して, (1) の解 $u(t)$ は $t \geq 0$ において次を満たす:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p} &\leq \begin{cases} C(\log t)^{-1/2}(\log \log(1+t))^{1/2}, & p = 2, \\ C(1+t)^{-(1/2-1/p)}(\log t)^{-1/p}, & 2 < p \leq \infty, \end{cases} \\ \sum_{|l|=1} \|\partial_{t,x}^l u(t)\|_{L^p} &\leq C(1+t)^{-(1/2-1/p)}(\log t)^{-1/(2p)}, \quad 2 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

定理 3. 正定数 C_3 が存在し, 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname{Re} K_F(z) \geq \frac{C_3}{\cosh^3 z} \quad (\mathbf{B}_3)$$

が成り立つと仮定し, ε は十分小さいとする. このとき, 正定数 C が存在して, (1) の解 $u(t)$ は $t \geq 0$ において次を満たす:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p} &\leq C(1+t)^{-(1/2-1/p)}(\log(1+t))^{-1/(2p)}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \\ \sum_{|l|=1} \|\partial_{t,x}^l u(t)\|_{L^p} &\leq C(1+t)^{-(1/2-1/p)}(\log(1+t))^{-1/(3p)}, \quad 2 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

定理 4.

$$\operatorname{Re} K_F(z_0) = 0, \quad \operatorname{Re} K_F(z) > 0, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{z_0\} \quad (\mathbf{C})$$

を満たす $z_0 \in \mathbb{R}$ が存在すると仮定し, ε は十分小さいとする. このとき, 正定数 C が存在して, (1) の解 $u(t)$ は $t \geq 0$ において次を満たす:

$$\sum_{|l| \leq 1} \|\partial_{t,x}^l u(t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-(1/2-1/p)} (\log(1+t))^{-1/(2p)}, \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

注意 1. (A) を満たす非線形項は必ず (A₀), (B₃), (C) のうちいずれかひとつを満たす. つまり, (A) の下での (1) の解の L^p ノルム ($2 \leq p < \infty$) は (A₀) を満たさない場合には線形解より速く減衰する.

参考文献

- [1] J.-M. Delort, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **34** (2001), 1–61.
- [2] S. Katayama, J. Math. Kyoto Univ. **39** (1999), 203–213.
- [3] D. Kim, H. Sunagawa, Nonlinear Analysis **97** (2014), 94–105.
- [4] K. Mochizuki, T. Motai, J. Math. Soc. Japan, **47** (1995), 405–421.
- [5] K. Moriyama, Differential Integral Equations **10** (1997), 499–520.
- [6] M. Nakao, Funkcial. Ekvac., **26** (1983), 237–250.
- [7] H. Sunagawa, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 379–400.
- [8] B. Yordanov, preprint, 1996.