ある臨界空間における温度付き圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式に対する非適切性について

青木 基記　(京都大学 大学院理学研究科 数学教室 学振 PD)*

1. 導入

本講演では, 理想気体の運動を表す以下の温度付き圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題の適切性について考察する.

$$\begin{cases} \partial_t \tilde\rho + \mathrm{div}\,(\tilde\rho u) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\tilde\rho u) + \mathrm{div}\,(\tilde\rho u\otimes u) + \nabla(\tilde\rho\theta) = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\,u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\tilde\rho\theta) + \mathrm{div}\,(\tilde\rho\theta u) + \tilde\rho\theta\mathrm{div}\,u - \kappa\Delta\theta & \\ \qquad\qquad = 2\mu|D(u)|^2 + \lambda|\mathrm{div}\,u|^2, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ (\tilde\rho,u,\theta)\big|_{t=0} = (\tilde\rho_0,u_0,\theta_0), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{cNS}$$

ここで, $\tilde\rho = \rho(t,x)$, $u = (u_1(t,x),u_2(t,x),u_3(t,x))$, $\theta = \theta(t,x)$ はそれぞれ流体の密度, 速度場, 温度を表す未知関数である. $\tilde\rho_0 = \tilde\rho_0(x)$, $u_0(x) = (u_{0,1}(x),u_{0,2}(x),u_{0,3}(x))$, $\theta_0 = \theta_0(x)$ はそれぞれ与えられた流体の初期密度, 初期速度場, 初期温度とする. また, μ と λ は $\mu>0$, $2\mu+\lambda\geq 0$ を満たす Lamé 定数である. $\kappa>0$ は熱伝導率を表す正定数である. さらに,

$$D(u) = \frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}$$

である. また, $|A|^2$ は行列 A と転置行列 A^T の積 AA^T のトレースとする.

本講演では, 特に密度が真空とならないような条件で初期値問題を考察する. すなわち, 密度 $\rho = \tilde\rho - 1$ は 定数 $\underline{\nu} > -1$ に対し,

$$\rho(t,x) \geq \underline{\nu}$$

を満たすようなものとする. 従って, 本研究では上記の条件と方程式 (cNS) を組み合わせた以下の方程式の初期値問題の適切性について考察を行う:

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}\,u + \mathrm{div}\,(\rho u) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \partial_t u - \mathcal{L}u + (1+\rho)(u\cdot\nabla)u + \nabla((1+\rho)\theta) = -\rho\partial_t u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \partial_t\theta + (1+\rho)(u\cdot\nabla)\theta + (1+\rho)\theta\mathrm{div}\,u - \kappa\Delta\theta & \\ \qquad\qquad = 2\mu|D(u)|^2 + \lambda|\mathrm{div}\,u|^2 - \rho\partial_t\theta, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ (\rho,u,\theta)\big|_{t=0} = (\rho_0,u_0,\theta_0), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $\mathcal{L} = \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}$ とする.

続いて, d 次元空間における圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題に関する先行研究について述べる. Chikami–Danchin [3] は 初期条件 $(\rho_0-1,u_0,E_0)\in(\dot B^{\frac{d}{p}}_{p,1},\dot B^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1},\dot B^{-2+\frac{d}{p}}_{p,1})$ $(1<p<2d)$ に対する温度付き圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の一意可解性と, 初期値 $(\rho_0,u_0,\theta_0)\in(\dot B^{\frac{d}{p}}_{p,1},\dot B^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1},\dot B^{-2+\frac{d}{p}}_{p,1})(1<p<d)$ に対する初期値問題 (1.1) の一意可解性を示した. E_0 は $E_0 := \dfrac{\rho_0 u_0^2}{2} + e(\rho_0,\theta_0)$ で定められる流

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
e-mail: aoki.motofumi.4e@kyoto-u.ac.jp

体の全エネルギーである．ここで初期条件として用いられた Besov 空間は方程式のスケールを不変にする関数空間になっている．

一方で，圧縮性流体の初期値問題に対して，非適切性の結果も多く示されている．Iwabuchi–Ogawa [4] は，関数空間 $(\rho_0, u_0, \theta_0) \in (\dot{B}^{\frac{2}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^2), \dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^2), \dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^2))(1 \le p \le \infty,\ 1 \le q < \infty)$ における方程式 (1.1) の初期値問題が非適切になることを示している．Chen–Miao–Zhang [2] は，$p > 3$ を満たす次の初期条件 $(\rho_0, u_0, \theta_0) \in (\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}^{-2+\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3))$ に対して，方程式 (1.1) の初期値問題の非適切性を示した．

2. 主結果

本研究では，3 次元空間における温度付き圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式 (1.1) に対して，以下の結果を得た．

定理. ([1]) ある初期値の関数列 $\{u_{0,N}\}_N \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ と 0 に収束する時刻の列 $\{T_N\}_N$，そして時刻 $[0, T_N]$ 上で初期値 $(0, u_{0,N}, 0)$ によって定まる滑らかな解の列 $\{(\rho_N, u_N, \theta_N)\}_N$ が存在し，

$$\lim_{N\to\infty} \|u_{0,N}\|_{\dot{B}^0_{3,1}} = 0, \ \lim_{N\to\infty} \|\theta_N(T_N)\|_{\dot{B}^{-1}_{3,1}} = \infty,$$

を満たす．すなわち，初期値 $(\rho_0, u_0, \theta_0) \in (\dot{B}^1_{3,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}^0_{3,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}^{-1}_{3,1}(\mathbb{R}^3))$ に対して，初期値問題 (1.1) は非適切である．

注意.

関数空間 $(\rho_0, u_0, \theta_0) \in (\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}^{-1+\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}^{-2+\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3))$ に初期値を持つ温度付き圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題については，Chikami–Danchin [3] によって $1 < p < 3$ のとき一意可解的になることが，Chen–Miao–Zhang [2] によって $p > 3$ のとき非適切になることがそれぞれ独立に示されていた．しかし，$p = 3$ の場合における初期値問題の適切性は示されていなかった．本結果は，その条件における適切性の問題を解決している．

References

[1] M. Aoki and T. Iwabuchi, *On the ill-posedness for the full system of compressible Navier-Stokes equations*, arXiv:2303.06888.

[2] Q. Chen, C. Miao, and Z. Zhang, *On the ill-posedness of the compressible Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **31** (2015), no. 4, 1375–1402.

[3] N. Chikami and R. Danchin, *On the well-posedness of the full compressible Navier-Stokessystem in critical Besov spaces*, J. Differential Equations **258** (2015), no. 10, 3435–3467.

[4] T. Iwabuchi and T. Ogawa, *Ill-posedness for the Cauchy problem of the two-dimensional compressible Navier-Stokes equations for an ideal gas*, J. Elliptic Parabol. Equ. **7** (2021), no. 2, 571–587.