

Semilinear Schrödinger equations with singular electromagnetic and harmonic potentials

鈴木 敏行* (神奈川大学 工学部)

次のポテンシャル付きの非線形 Schrödinger 方程式を考える.

$$(NLS)^- \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = (-i \nabla + A)^2 u + V u - \omega^2 |x|^2 u + \lambda |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$, $N \geq 3$, $V \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{R})$, $A \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{R}^N)$, $\omega > 0$ とする. V および A には, 次のスケールに関する条件を仮定する.

$$(1) \quad V(\mu x) = \mu^{-2} V(x), \quad A(\mu x) = \mu^{-1} A(x), \quad \mu > 0.$$

また, A には次のゲージ条件 (multipolar gauge) も仮定する.

$$(2) \quad x \cdot A(x) = 0.$$

仮定に見合った例として, V は $a|x|^{-2}$ や $b x_N |x|^{-3}$ が挙げられる. 前者は最近盛んに研究されている (Hardy ポテンシャルともいう). 後者は, クーロンポテンシャルで記述される単極子同士を隣接させた双極子の場に現れる. また, A の例は $b|x|^{-2}[-x_2, x_1, 0, \dots, 0]$ (Aharonov–Bohm 効果) が挙げられる. 以下, 作用素 P を

$$P := (-i \nabla + A)^2 + V = -\Delta - 2i A \cdot \nabla - i \operatorname{div} A + |A|^2 + V$$

と定める ($\operatorname{div} A = \nabla \cdot A$). (1) より $P[u(\mu x)] = \mu^2 (Pu)(\mu x)$, $\forall \mu > 0$ となる. これはスケール変換によりポテンシャルが無視できないことを意味する. この P が $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上で非負自己共役となるように

$$(3) \quad 0 \leq \delta(V, A) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [(-i \nabla + A)u]^2 + V |u|^2 dx; \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2} |u|^2 dx = 1 \right\}$$

を仮定する. このとき, P は Friedrichs 拡張 (form-sum) の意味で非負自己共役となる. Hardy の不等式より,

$$\tilde{c}_1 \|(1 - \Delta)^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \|(1 + P)^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \tilde{c}_2 \|(1 - \Delta)^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$$

が得られる. ただし, $\tilde{c}_1 \geq 0$ は $\delta(V, A) = 0$ のときに限って 0 になる. したがって, $\delta(V, A) > 0$ ならば, $\mathcal{D} := D((1 + P)^{1/2}) = H^1(\mathbb{R}^N)$ である. 一方, $\delta(V, A) = 0$ のときは, [2] と同様に $\mathcal{D} \supsetneq H^1(\mathbb{R}^N)$ となる. なお, $\mathcal{D} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ ($s < 1$) だから, ほぼ $H^1(\mathbb{R}^N)$ である. 以下, $\mathcal{D}^* := D((1 + P)^{-1/2})$, $\Sigma := \mathcal{D} \cap D(|x|)$, $\Sigma^* := \mathcal{D}^* + D((1 + |x|)^{-1})$ (Σ の双対空間) と表す.

$V = 0$, $A = 0$ のとき, (NLS)⁻ は [1] により詳細な解析が行われている.

*e-mail: t21.suzuki@gmail.com

Theorem 1 (see [4, Theorem 3.1]). $N \geq 3$. $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < 1 + 4/(N - 2)$ とする. V と A は (1), (2), (3) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in \Sigma$ に対して, $(\text{NLS})^-$ の時間局所解 $u \in C([-T, T]; \Sigma) \cap C^1([-T, T]; \Sigma^*)$ が一意に存在する. また, 次の保存則が成立する.

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad E(u(t)) = E(u_0).$$

ただし,

$$E(\varphi) := \frac{1}{2} \|(1 + P)^{1/2} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{\omega^2}{2} \| |x| \varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{\lambda}{p+1} \|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1}.$$

また, 次 (virial 等式) が成立する:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \| |x| u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= 8 \| P^{1/2} u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + 8\omega^2 \| |x| u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\quad + \frac{4\lambda N(p-1)}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1}. \end{aligned}$$

Theorem 2 (see [4, Theorem 3.5]). *Theorem 1* の条件に加え, $\lambda \geq 0$, $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N - 2)$ とする. このとき, 任意の $u_+ \in \Sigma$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(+it(P - \omega^2|x|^2)) u(t) = u_+ \quad \text{strongly in } \Sigma$$

となる $(\text{NLS})^-$ の時間大域解 $u \in C(\mathbb{R}; \Sigma) \cap C^1(\mathbb{R}; \Sigma^*)$ が一意に存在する.

Theorem 3 (see [4, Theorem 4.2]). *Theorem 1* の条件に加え, $\lambda < 0$, $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N - 2)$ とする. このとき, $E(u_0) + \omega^2 \| |x| u_0 \|_{L^2}^2 < 0$ となる $u_0 \in \Sigma$ に対して, $(\text{NLS})^-$ の局所解は有限時刻爆発する. 詳しくは,

$$J(u_0) := \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} x \overline{u_0} \cdot \nabla u_0 \, dx \leq 0$$

ならば, 未来に爆発:

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|(1 + P)^{1/2} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = +\infty,$$

$J(u_0) \geq 0$ ならば過去に爆発:

$$\lim_{t \rightarrow -T_2 + 0} \|(1 + P)^{1/2} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = +\infty.$$

$E(u_0) + \omega^2 \| |x| u_0 \|_{L^2}^2 + \omega |J(u_0)| < 0$ ならば未来にも過去にも爆発.

証明の方針. $\exp(-itP)$ と相性がいい 2 つの作用素

$$d(\beta)f(x) := \beta^{N/2} f(\beta x), \quad \beta > 0; \quad m(\sigma)f(x) := \exp\left(\frac{i\sigma|x|^2}{4}\right) f(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

を利用することで, 次の変換が定義できる.

$$v(t) = (\mathcal{C}_- u)(t) := m\left(\frac{-4\omega^2 t}{1 - 4\omega^2 t^2}\right) d\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 4\omega^2 t^2}}\right) u\left(\frac{\text{artanh}(2\omega t)}{2\omega}\right).$$

この変換を用いることで, $(\mathbf{NLS})^-$ は $|x|^2$ の項がない

$$(4) \quad \begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t} = P v + \lambda(1 - 4\omega^2 t^2)^{-1+N(p-1)/4} |v|^{p-1} v, \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

にできる. これを非自励系の半線形 Schrödinger 方程式に対するエネルギー法 (Proposition 4) と $\exp(-itP)$ に対する Strichartz 評価 (Proposition 5) を用いることで解の一意存在が証明できる.

非自励系の半線形 Schrödinger 方程式に対する抽象 Cauchy 問題を考える.

$$(5) \quad \begin{cases} i \frac{du}{dt} = Su + g(t, u) & \text{in } [-T, T] \times X_S^*, \\ u(0) = u_0 & \text{in } X_S. \end{cases}$$

非線形項 $g(t, u)$ については以下の 7 条件を考える. ただし, $X_S := D((1 + S)^{1/2})$, $X_S^* := D((1 + S)^{-1/2})$, $B_M := \{u \in X_S; \|u\|_{X_S} \leq M\}$ とする.

(A1) $G \in C([-T, T] \times X_S; \mathbb{R})$ があって, $d_{X_S} G(t, u) = g(t, u)$;

(A2)

$$\|g(t, u) - g(t, v)\|_{X_S^*} \leq C(M) \|u - v\|_{X_S} \quad \forall t \in [-T, T], \forall u, v \in B_M;$$

(A3) 非負の $\varphi \in L^1(-T, T)$ があって,

$$\|g(t, u) - g(s, u)\|_{X_S^*} \leq C(M) \left| \int_s^t \varphi(\sigma) d\sigma \right| \quad \forall t, s \in [-T, T], \forall u \in B_M;$$

(A4) 任意の $M > 0$ と $\delta > 0$ に対して $C_{1,\delta}(M) > 0$ があって

$$|G(t, u) - G(t, v)| \leq \delta + C_{1,\delta}(M) \|u - v\|_X \quad \forall t \in [-T, T], \forall u, v \in B_M;$$

(A5) $G(t, u)$ は任意の $u \in X_S$ に対して t について微分可能であり, 次を満たす $\varphi \in L^1(-T, T)$ がある. 任意の $M > 0$ と $\delta > 0$ に対して $C_{2,\delta}(M) > 0$ があって,

$$|G_t(t, u) - G_t(t, v)| \leq \varphi(t) [\delta + C_{2,\delta}(M) \|u - v\|_X] \quad \text{a.a. } t \in (-T, T), \forall u \in B_M;$$

(A6)

$$\operatorname{Re} \langle g(t, u), i u \rangle_{X_S^*, X_S} = 0 \quad \forall t \in [-T, T], \forall u \in X_S;$$

(A7) $\{w_n\}_n$ は $L^\infty(-T, T; X_S)$ における次を満たす有界列とする.

$$\begin{cases} w_n(t) \rightarrow w(t) \ (n \rightarrow \infty) & \text{weakly in } X_S \text{ a.a. } t \in I, \\ g(t, w_n) \rightarrow f \ (n \rightarrow \infty) & \text{weakly* in } L^\infty(I; X_S^*). \end{cases}$$

このとき,

$$\operatorname{Re} \int_I \langle f(t), i w(t) \rangle_{X_S^*, X_S} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_I \langle g(t, w_n(t)), i w_n(t) \rangle_{X_S^*, X_S} dt.$$

さらに, 次もいえれば $f(t) = g(t, w(t))$ が示される.

$$w_n(t) \rightarrow w(t) \ (n \rightarrow \infty) \text{ strongly in } X \text{ a.a. } t \in I.$$

Proposition 4. ([3, Theorem 2.1 and Remark 2.8]) $g(t, u)$ は (A1)–(A7) を仮定し, $u_0 \in X_S$ とする. このとき, $T_0 = T_0(\|u_0\|_{X_S}) \in (0, T]$ があって, (5) の時間局所解 $u \in C_w([-T_0, T_0]; X_S) \cap W^{1,\infty}(-T_0, T_0; X_S^*)$ が存在する. また, この解は次の保存則を満たす:

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_X = \|u_0\|_X \quad \forall t \in [-T_0, T_0], \\ (6) \quad & E(t, u(t)) - E(0, u_0) \leq \int_0^t G_t(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [-T_0, T_0]. \end{aligned}$$

ただし, $E(t, \varphi) = (1/2) \|(1 + S)^{1/2} \varphi\|_X^2 + G(t, \varphi)$. 更に, この時間局所解が一意ならば, (6) の不等号は等号になり, $u \in C([-T_0, T_0]; X_S) \cap C^1([-T_0, T_0]; X_S^*)$ となる.

Strichartz 評価は, 次の時間変数と空間変数に関するノルムについての不等式である.

$$\begin{aligned} (7) \quad & \|\exp(-itP)\varphi\|_{L^{\tau_0}(\mathbb{R}; L^{\rho_0}(\mathbb{R}^N))} \leq C_{V,A}(\tau_0) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\ (8) \quad & \left\| \int_0^t \exp(-i(t-s)P) F(s) ds \right\|_{L^{\tau_2}(\mathbb{R}; L^{\rho_2}(\mathbb{R}^N))} \leq C_{V,A}(\tau_1, \tau_2) \|F\|_{L^{\tau'_1}(\mathbb{R}; L^{\rho'_1}(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned}$$

ただし, $p' := p/(p-1)$ は Hölder 共役指数である. さて, (τ_j, ρ_j) ($j = 0, 1, 2$) は次を満たす指数の組で, **許容対** という.

$$\frac{2}{\tau_j} + \frac{N}{\rho_j} = \frac{N}{2}, \quad \tau_j, \rho_j \geq 2, \quad (\tau_j, \rho_j) \neq (2, \infty).$$

許容対のうち, $(2, 2N/(N-2))$ を **端点** という.

Proposition 5 ([5, Theorem 3.3]). $N \geq 3$ とし, V と A は (1), (2), (3) を仮定する. このとき, 端点以外の許容対 (τ_j, ρ_j) ($j = 0, 1, 2$) に対して (7), (8) が成立する.

References

- [1] R. Carles, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2003), 823–843.
- [2] R. Killip, C. Miao, M. Visan, J. Zhang, J. Zheng, *Sobolev spaces adapted to the Schrödinger operator with inverse-square potential*, Math. Z. **288** (2018), 1273–1298.
- [3] T. Suzuki, *Scattering theory for semilinear Schrödinger equations with an inverse-square potential via energy methods*, Evol. Equ. Control Theory, **8** (2019), 447–471.
- [4] T. Suzuki, *Semilinear Schrödinger evolution equations with inverse-square and harmonic potentials via pseudo-conformal symmetry*, Commun. Pure Appl. Anal., **20** (2021), 4347–4377.
- [5] T. Suzuki, *Semilinear Schrödinger equations with a critical scale of the singular electromagnetic field*, J. Differ. Equ., **371** (2023), 151–190.