円環領域における優臨界 Brezis-Nirenberg 問題の正値解の一意性と多重存在性

田中敏　(東北大学大学院理学研究科)*

本講演は塩路直樹氏 (横浜国立大学) と渡辺宏太郎氏 (防衛大学校) との共同研究に基づくものである.

次の問題

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v + v^p = 0, & x \in A(a,b), \\ v = 0, & x \in \partial A(a,b), \end{cases}$$

を考える. ここで, $\lambda > 0$, $p > 1$, $A(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^N : a < |x| < b\}$, $N \geq 2$, $0 < a < b < \infty$ である. この問題の正値球対称解 $u(r)$ は次の常微分方程式の境界値問題

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{N-1}{r}u' + \lambda u + u^p = 0, & a < r < b, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

を満たす. $\lambda_1(\Omega)$ で問題

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \lambda \phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

の第一固有値を表す. $\lambda < \lambda_1(A(a,b))$ のとき, またそのときに限って問題 (1) は正値解をもつことが知られている. $N = 3$ の場合, $\lambda_1(A(a,b)) = \pi^2/(b-a)^2$ であり, $\lambda < \lambda_1(A(a,b))$ は $b - a < \pi/\sqrt{\lambda}$ を意味する.

問題 (1) の正値解の一意性について, Ni-Nussbaum (1985), Yadava (1997), Korman (2001) などの結果がある. Yao-Li-Chen [1] は次の結果を導いた.

定理 A (Yao-Li-Chen [1]). $\lambda < \lambda_1(A(a,b))$ とする. 次の (i)–(iii) のどれかが成立すれば, 問題 (1) の正値解は存在して一意である:

(i) $N = 2$, $p > 1$;

(ii) $N \geq 3$, $1 < p \leq p_S$;

(iii) $N \geq 3$, $p > p_S$ かつ「$a \geq r_0$ または $b \leq r_0$.」

ここで, p_S は臨界ソボレフ指数 $p_S := (N+2)/(N-2)$ であり,

$$r_0 = \sqrt{\frac{2((N-2)p + N - 4)((N-2)p - (N+2))}{\lambda(p-1)(p+3)^2}}$$

である.

また, Shioji-Watanabe [2] は次の結果を導いている.

定理 B (Shioji-Watanabe [2]). $N = 3$, $p > 5$, $-a + (\pi/\sqrt{\lambda}) \leq b < a + (\pi/\sqrt{\lambda})$ ならば問題 (1) の正値解は存在して一意である.

*e-mail: `satoshi.tanaka.d4@tohoku.ac.jp`

$N=3$ のとき, $p_S=5$ であり, $b<a+(\pi/\sqrt{\lambda})$ と $\lambda<\lambda_1(A(a,b))$ は同値である.

$N=3$ の場合であるが, 次の一意性の結果を得たので紹介したい.

定理 1. $N=3$, $p>5$ とする. 次の (i) または (ii) のどちらかが成立すれば, 問題 (1) の正値解は存在して一意である:

(i) $a+\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\dfrac{2(p+3)\sqrt{\lambda}a}{p-5}\le b<a+\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$;

(ii) $b\le a+\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\sqrt{\dfrac{8}{p-5}}$.

定理 1 が $N=3$ に限られるのは, 線形方程式 $\phi''+(N-1)r^{-1}\phi'+\lambda\phi=0$ の基本解が $N=3$ のときは $r^{-1}\sin\sqrt{\lambda}r$, $r^{-1}\cos\sqrt{\lambda}r$ であり, $N\ge 4$ のときは, より複雑なものであるためである. 定理 1 の条件 (i), (ii) も技術的な条件であるが, $b-a<\pi/\sqrt{\lambda}$ を満たすほとんどの a,b に対して, 問題 (1) の正値解は存在して一意であることがわかる. その一方で, 定理 A, B, 1 では判定できない部分もある. 例えば, $b<\pi/\sqrt{\lambda}$ であり b が十分 $\pi/\sqrt{\lambda}$ に近い場合, $a>0$ が十分小さいならば, $b-a<\pi/\sqrt{\lambda}$ を満たすが, 定理 A, B, 1 では判定できない. これは技術的な問題であるように見えるが, 実際はそうではない. 即ち, 残された部分には, 正値解が 3 個以上存在するような場合がある. 実際, 次の結果が成り立つ.

定理 2. $N\ge 3$, $p>p_S$ とする. 球状領域での問題

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
u''+\dfrac{N-1}{r}u'+\lambda u+u^p=0, & 0<r<b,\\
u'(0)=u(b)=0, &
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

が正値解をもつならば, 十分小さなすべての $a>0$ に対して, 円環領域での問題 (1) は少なくとも 3 個の正値解をもつ.

球状領域の問題について次が知られている.

定理 C. $N\ge 3$, $p>p_S$ とする. そのとき, 次を満たす $\underline{r}>0$ が存在する: $\underline{r}<b<\sqrt{\lambda_1(B)/\lambda}$ ならば, 問題 (2) は正値解をもつ; $b<\underline{r}$ または $b\ge\sqrt{\lambda_1(B)/\lambda}$ ならば, 問題 (2) は正値解をもたない. ここで, $B=\{x\in\mathbb{R}^N : |x|<1\}$ である. さらに, 次の (i), (ii) が成り立つ:

(i) $p_S<p<p_{JL}$ のとき, ある $r_*>0$ が存在して, 任意の k に対して, $|b-r_*|$ が十分小さいならば, 問題 (2) は k 個の正値解をもつ. 特に, $b=r_*$ のとき, 問題 (2) は無限個の正値解をもつ;

(ii) $p\ge p_{JL}$ のとき, 問題 (2) は正値解が存在すれば, それは一意である.

ここで, p_{JL} は Joseph-Lundgren 指数

$$
p_{JL}:=\left\{
\begin{array}{ll}
1+\dfrac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}}, & N\ge 11,\\
\infty, & 3\le N\le 10,
\end{array}
\right.
$$

である.

定理 2, C より, 次が成り立つ.

系 3. $N \geq 3$, $p > p_S$ とする. $\underline{r} > 0$ を定理 C のものとする. そのとき, $\underline{r} < b < \sqrt{\lambda_1(B)/\lambda}$ ならば, 十分小さなすべての $a > 0$ に対して, 問題 (1) は少なくとも 3 個の正値解をもつ.

定理 C を使って, 定理 2 と同様の方法で次も得られる.

定理 4. $N \geq 3$, $p_S < p < p_{JL}$ とする. $r_* > 0$ を定理 C のものとする. そのとき, 任意の k に対して, $|b - r_*|$ が十分小さいならば, 十分小さなすべての $a > 0$ に対して, 問題 (1) は少なくとも k 個の正値解をもつ.

定理 1, 2 を組み合わせると, 次も得られる.

系 5. $N = 3$, $p > 5$ とする. そのとき, $b = 1$ (単位球) の場合の問題 (2) が正値解をもてば

$$\left(\pi - \arctan\sqrt{\frac{8}{p-5}}\right)^2 < \lambda < \pi^2 \tag{3}$$

が成り立つ.

$p \to \infty$ とすると, (3) の最左辺は π^2 に収束する.

参考文献

[1] R. Yao, Y. Li and H. Chen, Uniqueness of positive radial solutions of a semilinear elliptic equation in an annulus, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **39** (2019), 1585–1594.

[2] N. Shioji and K. Watanabe, A Pohožaev type identity and its application to uniqueness of positive radial solutions of Brezis-Nirenberg problem on an annulus, *J. Math. Anal. Appl.* **497** (2021), Paper No. 124901, 13 pp.