

斉次写像に対する大域的逆関数定理について

杉本 充

1. INTRODUCTION

この講演は、Michael Ruzhansky 氏 (Ghent University) との共同研究 [RS15] に基づくものである。

通常、逆関数定理とは以下のような主張のことを指す：

逆関数定理. C^1 -写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ がある点 $a \in \mathbb{R}^n$ において $\det f'(a) \neq 0$ ならば、 a と $f(a)$ それぞれの近傍 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $f|_U : U \rightarrow V$ は微分同相。

この定理の大域版である次の定理は成立するであろうか？

大域的逆関数定理 (?). C^1 -写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が常に $\det f' \neq 0$ ならば、 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は微分同相。

これは一般的には正しくない。たとえば次の写像が $n = 2$ における反例である：

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

実際 $\det f'(x, y) = e^{2x} \neq 0$ であることが簡単な計算で確かめられるが、 $f(0, 0) = f(0, 2\pi) = f(0, 4\pi) = \dots$ であるので $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は単射ですらない。したがって、 f にさらなる仮定を課さない限り、大域的逆関数定理の結論は成立しないことがわかる。このことに関しては、Hadamard による以下の二つの定理が知られている。

定理 1. C^1 -写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が常に $\det f' \neq 0$ かつ f' の逆行列の全ての成分が有界ならば $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は微分同相。

定理 2. C^1 -写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が常に $\det f' \neq 0$ かつ $|f(y)| \rightarrow \infty$ ($|y| \rightarrow \infty$) ならば $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は微分同相。

これらの定理はそれぞれ Schawatz [Sch69], Gordon [Gor72] による証明後、広く認知されるようになった。実は定理 2 においては逆も成立するので、定理 1 は定理 2 の特別な場合に過ぎないことが分かる。なお、定理 1 の仮定は満たさないが定理 2 の仮定を満たす写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の例としては、

$$\varphi(t) = \int_0^t (1 + |s|)^{-1} ds$$

として、

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$$

としたものなどが該当する。

この講演では、 $\kappa \in \mathbb{R}$ として、 $f(\lambda x) = \lambda^\kappa f(x)$ ($\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n$) を満たす (κ 次正值) 斉次写像 f に関する大域的逆関数定理を考察する。斉次写像は一般に原点が

名古屋大・多元数理科学研究科, E-mail: sugimoto@math.nagoya-u.ac.jp.

特異点となるため、定義域を $\mathbb{R}^n \setminus 0$ に制限したものを考えることになる。そのため、Hadamard による定理をそのまま適用することができない。このような写像は双曲型方程式の初期値問題に対する幾何光学解を大域的に構成する際に登場する。次がここでの主定理である。

定理 3. $n \geq 3$ かつ $\kappa > 0$ とする。 κ 次正值斉次な C^1 -写像 $f : \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ が常に $\det f' \neq 0$ ならば、 $f : \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$ であり、これは微分同相。さらに、 f を $f(0) = 0$ と定めて $\mathbb{R}^n$ 上の写像へと拡張すれば $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は同相。

この定理は $n = 2$ とした場合には成立しない。実際

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

は 2 次正值斉次であり、 $\det f'(x, y) = 4(x^2 + y^2) \neq 0$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) であることが簡単な計算で確かめられるが、 $f(x, y) = f(-x, -y)$ であるので $f : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ は単射ですらない。

定理 3 の証明についてであるが、以下の位相的な事実を用いる。(Gordon [Gor72] でも、この事実に証明を与えることにより定理 2 を導いている。)

定理 4. M と N を境界のない向け付けられた連結 d 次元 C^1 -多様体とする。 C^1 -写像 $f : M \rightarrow N$ が常に $\det f' \neq 0$ でかつ *proper* (すなわち、任意のコンパクト集合 $K \subset N$ に対し逆像 $f^{-1}(K) \subset M$ はコンパクト) ならば $f : M \rightarrow N$ は全射である。さらに、 N が単連結ならば $f : M \rightarrow N$ は単射でもある。

REFERENCES

- [Gor72] W. B. Gordon. On the diffeomorphisms of Euclidean space. Am. Math. Mon. **79** (1972), 755–759,
- [RS15] M. Ruzhansky and M. Sugimoto. On global inversion of homogeneous maps, Bull. Math. Sci. **5** (2015), 13–18.
- [Sch69] J. T. Schwartz, Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.